PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 1. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT.

1) PHƯƠNG PHÁP

- Bước 1: Để tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên miền $\left[a;b\right]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (Lập bảng giá trị)

- Bước 2: Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max , giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min

- Chú ý:

Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\dfrac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp)

Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác $\sin x,\cos x,\tan x...$ ta chuyển máy tính về chế độ Radian

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-2x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[1;3\right]$

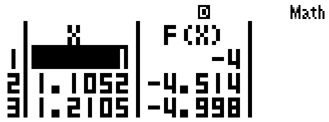
A. $\max=\dfrac{67}{27}$ **B.** $\max=-2$ **C.** $\max=-7$ **D.** $\max=-4$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1: CASIO**

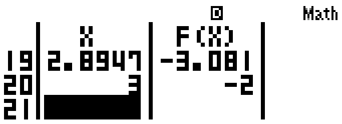
➢ Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 1 End 3 Step $\dfrac{3-1}{19}$

MODE 7 ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ − 2 ALPHA) x^2 − 4 ALPHA) + 1 = = 1 = 3 = (3 − 1) ÷ 1 9 =



1

➢ Quan sát bảng giá trị $F\left(X\right)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F\left(X\right)$ có thể đạt được là $f\left(3\right)=-2$



Vậy $\max=-2$, dấu = đạt được khi $x=3$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Tính đạo hàm $y'=3x^2-4x-4$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

▪ Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$ 1	2	3 $+\infty$
y'		0	
y		$f(1)=-4$ ↘ ↗ $f(3)=-2$	

- Nhìn bảng biến thiên ta kết luận $\max = f(3) = -2$

❖ **Bình luận:**

- Qua ví dụ 1 ta đã thấy ngay sức mạnh của máy tính Casio, việc tìm Max chỉ cần quan sát bảng giá trị là xong.
- Phương pháp tự luận tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số được tiến hành theo 3 bước:
  +)Bước 1: Tìm miền xác định của biến x.
  +)Bước 2: Tính đạo hàm và xác định khoảng đồng biến nghịch biến.
  +)Bước 3: Lập bảng biến thiên, nhìn vào bảng biến thiên để kết luận.
- Trong bài toán trên đề bài đã cho sẵn miền giá trị của biến x là $[1;3]$ nên ta bỏ qua bước 1.

Ví dụ 2. [Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]
Hàm số $y=|3\cos x-4\sin x+8|$ với $x\in[0;2\pi]$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó tổng $M+m$ bằng bao nhiêu ?

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $7\sqrt{3}$ **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** 16

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Để tính toán các bài toán liên quan đến lượng giác ta chuyển máy tính về chế độ Radian

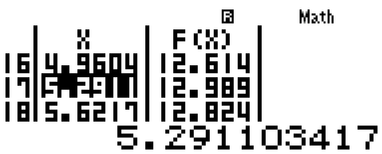
SHIFT MODE 4

➢ Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 0 End 2π Step $\dfrac{2\pi-0}{19}$

MODE 7 SHIFT hyp 3 cos ALPHA)) − 4 sin ALPHA)) + 8 = = 0 =
2 SHIFT x10^x = 2 SHIFT x10^x ÷ 1 9 =



➢ Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(5.2911)=12.989\approx 13 = M$



Ta thấy giá trị nhỏ nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(2.314)=3.0252\approx 3 = m$

Vậy $M+m=16 \Rightarrow$ Đáp số **D** là chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được :

$\left(3\cos x-4\sin x\right)^2 \le \left(3^2+\left(-4\right)^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=25$

$\Rightarrow \left|3\cos x-4\sin x\right| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 3\cos x-4\sin x \le 5 \Leftrightarrow 3 \le 3\cos x-4\sin x=8 \le 13$

▪ Vậy $3 \le \left|3\cos x-4\sin x+8\right| \le 13$

❖ **Bình luận:**

- Nếu bài toán liên quan đến các đại lượng lượng giác ta nên chuyển máy tính về chế độ Radian để được kết quả chính xác nhất.
- Trong Bất đẳng thức Bunhiacopxki có dạng $\left(ax+by\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$

Ví dụ 3. [Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Cho các số x, y thỏa mãn điều kiện $y \le 0, x^2+x-y-12=0$ Tìm giá trị nhỏ nhất : $P=xy+x+2y+17$

A. -12 **B.** -9 **C.** -15 **D.** -5

Hướng dẫn giải

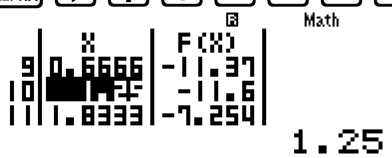
❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Từ $x^2+x-y-12=0$ ta rút được $y=x^2+x-12$ Lắp vào P ta được : $P=\left(x+2\right)\left(x^2+x-12\right)+x+17$

➢ Để tìm Min của P ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7, tuy nhiên việc còn thiếu của chúng ta là miền giá trị của x . Để tìm điều này ta xét $y \le 0 \Leftrightarrow x^2+x-12 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$

Sử dụng MODE 7 với thiết lập Start -4 End 3 Start $\dfrac{7}{19}$ ta được:

MODE 7 (ALPHA) + 2) (ALPHA) x² + ALPHA) − 1 2) + ALPHA) + 1 7 = = − 4 = 3 = 7 ÷ 1 2 =



Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất là $f\left(1.25\right)=-11.6 \approx -12$

Vậy đáp số chính xác là **A**

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Dùng phương pháp dồn biến đưa biểu thức P chứa 2 biến trở thành biểu thức P chứa 1 biến x

$\Rightarrow\ P=\left(x+2\right)\left(x^2+x-12\right)+x+17=x^3+3x^2-9x-7$

Đặt $f\left(x\right)=x^3+3x^2-9x-7$

▪ Tìm miền giá trị của biến x ta có : $y \le 0 \Leftrightarrow x^2+x-12 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$

▪ Khảo sát hàm $f\left(x\right)$ ta có : $f'\left(x\right)=3x^2+6x-9$, $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

So sánh $f\left(1\right)=-12; f\left(-3\right)=20; f\left(-4\right)=13; f\left(3\right)=20$

Vậy giá trị nhỏ nhất $f(\max) = -12$ đạt được khi $x = 1$

❖ **Bình luận:**

- Một bài tìm Min max sử dụng phương pháp dồn biến hay. Việc tìm cận và tìm giá trị nhỏ nhất có sự đóng góp rất lớn của Casio để tiết kiệm thời gian.

Ví dụ 4. [Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2;3]$ là $-\dfrac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng :

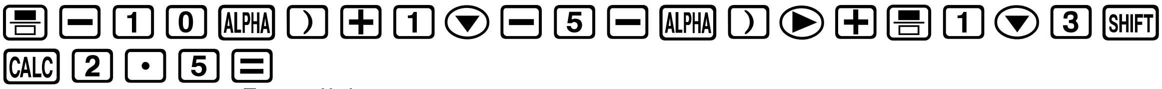
A. -5 **B**. 1 **C**. 0 **D**. -2

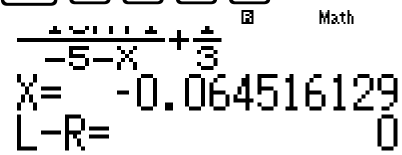
Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Ta hiểu nếu giá trị nhỏ nhất của $y = -\dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[2;3]$ có nghĩa là phương trình $y + \dfrac{1}{3} = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;3]$

➢ Thử nghiệm đáp án A với $m = -5$ ta thiết lập $\dfrac{-10x+1}{-5-x} + \dfrac{1}{3} = 0$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE





Ta thấy khi $y = \dfrac{1}{3}$ thì $x = -0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ vậy đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m = 0$ khi đó y có dạng $\dfrac{1}{-x}$





Ta thấy khi $y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 3$ là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Tính đạo hàm $y' = \dfrac{2m(m-x)-(2mx+1)(-1)}{(m-x)^2} = \dfrac{2m^2+1}{(m-x)^2} > 0$ với mọi $x \in D$

$\Rightarrow$ Hàm y luôn đồng biến

$\Rightarrow$ Hàm y đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x = 3$

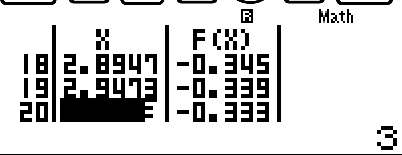
▪ Vậy $y(3) = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{6m+1}{m-3} = \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow m = 0$

❖ **Bình luận:**

- Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 và VD2 với chức năng MODE 7

Ta thấy với đán án C hàm số $y = -\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất $-\dfrac{1}{3}$ khi $x = 3$

MODE 7 [phân số] 1 ▼ − ALPHA) = = 2 = 3 = 1 ÷ 1 9 =



Ví dụ 5. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Cho hàm số $y = a\sin x + b\cos x + x$ $\left(0 < x < 2\pi\right)$ đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \pi$.

Tính giá trị của biểu thức $T = a + b\sqrt{3}$

A. $T = 2\sqrt{3}$ **B.** $T = 3\sqrt{3} + 1$ **C.** $T = 2$ **D.** $T = 4$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Ta hiểu hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

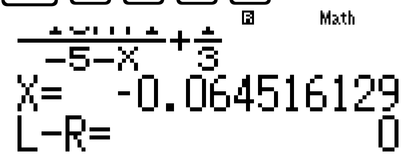
➢ Tính $y' = a\cos x - b\sin x + 1$.

Ta có $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\pi}{3} = 0$ (1)

Lại có $y'\left(\pi\right) = 0 \Leftrightarrow -a + \pi = 0 \Rightarrow a = \pi$. Thế vào (1) ta được

➢ SHIFT SOLVE

[phân số] − 1 0 ALPHA) + 1 ▼ − 5 − ALPHA) ▶ + [phân số] 1 ▼ 3 SHIFT CALC 2 • 5 =



Ta thấy khi $y = \frac{1}{3}$ thì $x = -0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $\left[2;3\right]$ vậy đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m = 0$ khi đó y có dạng $\frac{1}{-x}$

[phân số] 1 ▼ − ALPHA) ▶ + [phân số] 1 ▼ 3 SHIFT CALC 2 • 5 =



Ta thấy khi $y = \frac{1}{3}$ khi $x = 3$ là giá trị thuộc đoạn $\left[2;3\right]$ $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Tính đạo hàm $y' = \frac{2m\left(m - x\right) - \left(2mx + 1\right)\left(-1\right)}{\left(m - x\right)^2} = \frac{2m^2 + 1}{\left(m - x\right)^2} > 0$ với mọi $x \in D$

  $\Rightarrow$ Hàm y luôn đồng biến

  $\Rightarrow$ Hàm y đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x = 3$

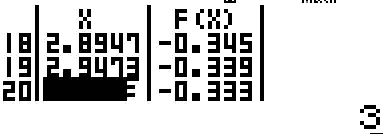
- Vậy $y\left(3\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{6m + 1}{m - 3} = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow m = 0$

❖ **Bình luận:**

- Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 và VD2 với chức năng MODE 7

Ta thấy với đán án C hàm số $y=-\frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất $-\frac{1}{3}$ khi $x=3$

MODE 7 $\frac{\square}{\square}$ 1 ▼ − ALPHA) = = 2 = 3 = 1 ÷ 1 9 =



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Gọi M,m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó

A. $M=\frac{1}{e};m=0$ **B.** $M=e;m=0$ **C.** $M=e,m=\frac{1}{e}$ **D.** $M=e;m=1$

Bài 2. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$

A. $M=3$ **B.** $M=3\sqrt{2}$ **C.** $M=2\sqrt{3}$ **D.** $M=2+\sqrt{3}$

Bài 3. [Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-2x+3\right)^2-7$

A. $\min y=-5$ **B.** $\min y=-7$

C. $\min y=-3$ **D.** Không tồn tại min

Bài 4. [Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y=\frac{mx-4}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[-2;6]$

A. $m=\frac{2}{6}$ **B.** $m=-\frac{4}{5}$ **C.** $m=\frac{3}{4}$ **D.** $m=\frac{6}{7}$

Bài 5. [Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]

Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ thì :

A. $M=19;m=1$ **B.** $M=0;m=-19$ **C.** $M=0;m=-19$ **D.** Kết quả khác

Bài 6. [Thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc lần 1 năm 2017]

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ là :

A. $\min y=0$ **B.** $\min y=1$

C. $\min y=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ **D.** Không tồn tại GTNN

Bài 7. [Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ bằng :

A. 1. **B.** 7 **C.** -1 **D.** 3

Bài 8. [Thi HK1 THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHSP năm 2017]

Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$ trên đoạn $[0;2]$. Giá trị của biểu thức $P=\left(m^2-4M\right)^{2016}$ là :

A. 0 **B.** e^{2016} **C.** 1 **D.** 2^{2016}

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

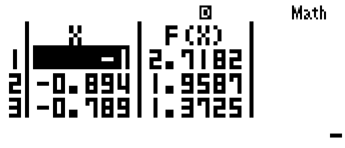
Gọi M,m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó

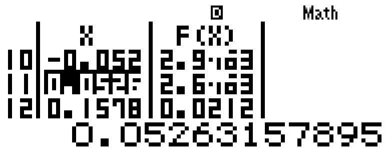
A. $M=\frac{1}{e};m=0$ **B.** $M=e;m=0$ **C.** $M=e,m=\frac{1}{e}$ **D.** $M=e;m=1$

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y=f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ với lệnh MODE 7 Start -1 End 1 Step $\frac{2}{19}$

MODE 7 ▭/▭ ALPHA) x^2 ▼ ALPHA $\times 10^x$ $x^{\blacksquare}$ ALPHA) = = − 1 = 1 = 2 ÷ 1 9 =





- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M=2.7182=e$ đạt được khi $x=-1$ và $m=2.6\text{x}10^{-3}\approx 0$ Sử dụng Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 2. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$

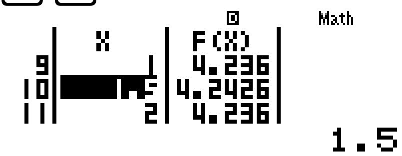
A. $M=3$ **B.** $M=3\sqrt{2}$ **C.** $M=2\sqrt{3}$ **D.** $M=2+\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

- Theo điều kiện xác định thì $\begin{cases}x+3\geq 0\\6-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\leq k\leq 6$

- Lập bảng giá trị cho $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$ với lệnh MODE 7 Start -3 End 6 Step 0.5

MODE 7 √▭ ALPHA) + 3 ► + √▭ 6 − ALPHA) = = − 3 = 6 = 0 . 5 =





- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M=4.2421=3\sqrt{2}$ đạt được khi $x=-1$ và $m=2.6\text{x}10^{-3}\approx 0$ Sử dụng Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 3. [Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-2x+3\right)^2-7$

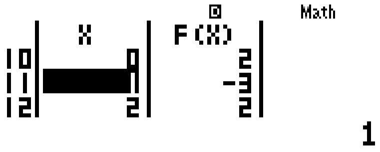
A. $\min y=-5$ **B.** $\min y=-7$

C. $\min y=-3$ **D.** Không tồn tại min

Hướng dẫn giải

- Đề bài không nói gì đến miền giá trị của x. Khi đó ta chọn Start -9 End 10 Step 1
- Lập bảng giá trị cho $y=\left(x^2-2x+3\right)^2-7$ với lệnh MODE 7

MODE 7 (ALPHA) x^2 − 2 ALPHA) + 3) x^2 − 7 = = − 9 = 1 0 = 1 =



- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $\min y=-3$ đạt được khi $x=1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 4. [Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

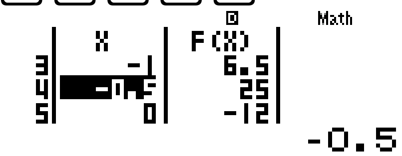
Tìm m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[-2;6]$

A. $m=\dfrac{2}{6}$ **B.** $m=-\dfrac{4}{5}$ **C.** $m=\dfrac{3}{4}$ **D.** $m=\dfrac{6}{7}$

Hướng dẫn giải

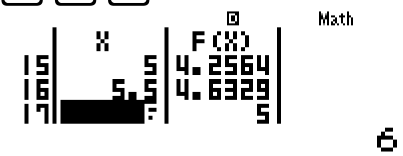
- Thử với $m=\dfrac{2}{6}$ thì giá trị lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ **A** sai

MODE 7 ▭ 2 ALPHA) ÷ 6 − 4 ▼ ALPHA) + 2 ÷ 6 = = − 2 = 6 = 0 . 5 =



- Tương tự như vậy với $m=34$ thì giá trị lớn nhất là 5.$\Rightarrow$ Đáp số **C** chính xác

MODE 7 ▭ 3 4 ALPHA) − 4 ▼ ALPHA) + 3 4 = = − 2 = 6 = 0 . 5 =



Bài 5. [Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]

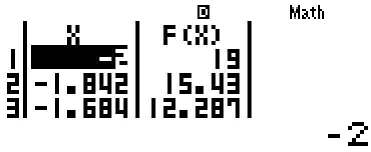
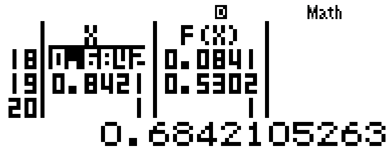
Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ thì :

A. $M=19;m=1$ **B.** $M=0;m=-19$ **C.** $M=0;m=-19$ **D.** Kết quả khác

Hướng dẫn giải

- Hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thêm lệnh SHIFT HYP. Sử dụng MODE 7 với Start -2 End 1 Step $\dfrac{3}{19}$

MODE 7 SHIFT hyp ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ − 3 ALPHA) x^2 + 1 = = − 2 = 1 = 3 ÷ 1 9 =

- Quan sát bảng giá trị thấy $M=19;m=0$. $\Rightarrow$ Đáp số **C** chính xác

Bài 6. [Thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc lần 1 năm 2017]
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ là :

A. $\min y=0$ **B.** $\min y=1$

C. $\min y=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ **D.** Không tồn tại GTNN

Hướng dẫn giải

- Vì chu kì của hàm $\sin, \cos$ là 2π nên ta chọn Start -2π End 2π Step $\frac{4\pi}{19}$
- Lập bảng giá trị cho $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ với lệnh MODE 7

SHIFT MODE 4 MODE 7 √ 1 + sin ALPHA)) ▶ + √ 1 + cos ALPHA)) =
= − 2 SHIFT ×10^x = 2 SHIFT ×10^x = 4 SHIFT ×10^x ÷ 1 9 =



Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M=1.0162\approx 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 7. [Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]
Cho hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ bằng :

A. 1. **B.** 7 **C.** -1 **D.** 3

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y=3\sin x-4\sin^3 x$ với lệnh MODE 7 Start $-\frac{\pi}{2}$ End $\frac{\pi}{2}$ Step $\frac{\pi}{19}$

SHIFT MODE 4 MODE 7 3 sin ALPHA)) − 4 sin ALPHA)) x^■ 3 = = − SHIFT
×10^x ÷ 2 = SHIFT ×10^x ÷ 2 = SHIFT ×10^x ÷ 1 9 =



Quan sát bảng giá trị lớn nhất là $1\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

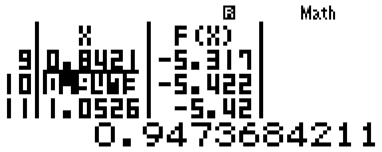
Bài 8. [Thi HK1 THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHSP năm 2017]
Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-3)e^x$ trên đoạn $[0;2]$. Giá trị của biểu thức $P=(m^2-4M)^{2016}$ là :

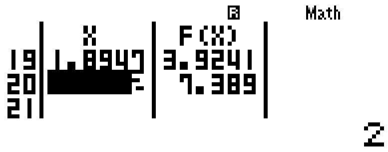
A. 0 **B.** e^{2016} **C.** 1 **D.** 2^{2016}

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ với lệnh MODE 7 Start 0 End 2 Step $\frac{2}{19}$

MODE 7 (ALPHA) x^2 − 3) ALPHA $\times10^x$ $x^{\blacksquare}$ ALPHA) = = 0 = 2 = 2 ÷ 1 9 =





- Quan sát bảng giá trị ta thấy $m = -5.422$ và $M = 7.389$
  $\Rightarrow P = \left(m^2 - 4M\right)^{2016} = \left(-0.157916\right)^{2016} \approx 0$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**.

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 2. TÌM NHANH KHOẢNG ĐỒNG BIẾN – NGHỊCH BIẾN.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Tính đồng biến nghịch biến : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I . Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$) và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm của I thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I

2. Cách 1 Casio : Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio . Quan sát bảng kết quả nhận được , khoảng nào làm cho hàm số luôn tăng thì là khoảng đồng biến, khoảng nào làm cho hàm số luôn giảm là khoảng ngịch biến.

3. Cách 2 Casio : Tính đạo hàm, thiết lập bât phương trình đạo hàm, cô lập m và đưa về dạng $m \geq f(x)$ hoặc $m \leq f(x)$. Tìm Min, Max của hàm $f(x)$ rồi kết luận.

4. Cách 3 Casio : Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba)

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào ?

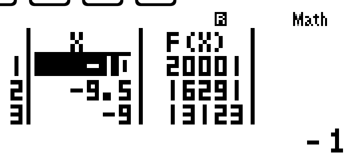
A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(0; +\infty)$ **C.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ **D.** $(-\infty; 0)$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO MODE 7**

➢ Để kiểm tra đáp án A ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với thiết lập Start -10 End $-\frac{1}{2}$ Step 0.5

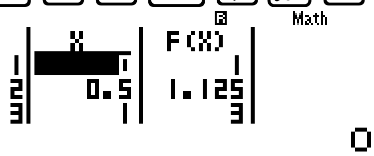
MODE 7 2 ALPHA) $x^\blacksquare$ 4 ▶ + 1 = = − 1 0 = − 0 . 5 = 0 . 5 =



Ta thấy ngay khi x càng tăng thì $f(x)$ càng giảm ⇒ Đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy, để kiểm tra đáp án B ta cũng sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 0 End 9 Step 0.5

MODE 7 2 ALPHA) $x^\blacksquare$ 4 ▶ + 1 = = 0 = 9 = 0 . 5 =

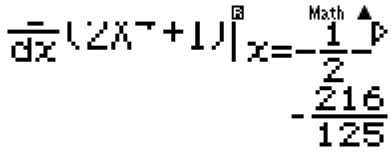


Ta thấy khi x càng tăng thì tương ứng $f(x)$ càng tăng ⇒ Đáp án **B** đúng

❖ **Cách 2 : CASIO ĐẠO HÀM**

➢ Kiểm tra khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ ta tính $f'\left(-\frac{1}{2} - 0.1\right)$

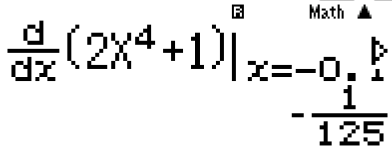
SHIFT ∫ 2 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ + 1 ▶ − ▭ 1 ▼ 2 ▶ − 0 . 1 =



Đạo hàm ra âm (hàm số nghịch biến) $\Rightarrow$ Giá trị $-\frac{1}{2}-0.1$ vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Kiểm tra khoảng $(-\infty;0)$ ta tính $f'(0-0.1)$

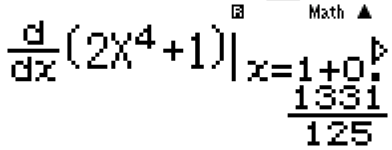
◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL DEL DEL DEL DEL DEL =



Điểm $0-0.1$ vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **D** sai và **C** cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

- Xác minh thêm 1 lần nữa xem B đúng không . Ta tính $f'(1+0.1)=\frac{1331}{125}$ $\Rightarrow$ Chính xác

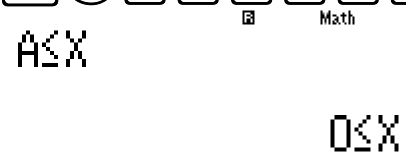
◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL 1 + =



❖ **<u>Cách 3</u> : CASIO MODE 5 INEQ**

- Hàm số bậc 4 khi đạo hàm sẽ ra bậc 3. Ta nhẩm các hệ số này trong đầu. Sử dụng máy tính Casio để giải bất phương trình bậc 3

MODE ▼ 1 2 3 8 = 0 = 0 = 0 = =



Rõ ràng $x \ge 0$

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Tính đạo hàm $y'=8x^3$
- Để hàm số đồng biến thì $y'\ge 0 \Leftrightarrow x^3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Khi sử dụng Casio ta phải để ý : Hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì sẽ **luôn tăng** khi x tăng. Nếu lúc tăng lúc giảm thì không đúng .

<u>Bài 2</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ đồng biến trên tập xác định khi giá trị của m là :

A. $m\le 1$ **B.** $m\ge 3$ **C.** $-1\le m\le 3$ **D.** $m<3$

Hướng dẫn giải

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

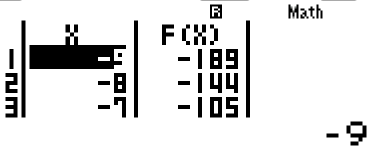
- Để giải các bài toán liên quan đến tham số m thì ta phải cô lập m

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y'\ge 0 \Leftrightarrow 3x^2+6x+m\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -3x^3-6x=f(x)$

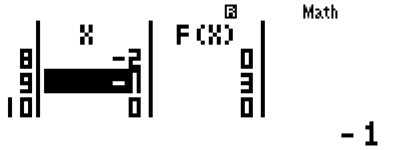
Vậy để hàm số y đồng biến trên tập xác định thì $m \geq f(x)$ hay $m \geq f(\max)$ với mọi x thuộc R

- ➢ Để tìm Giá trị lớn nhất của $f(x)$ ta vẫn dùng chức năng MODE 7 nhưng theo cách dùng của kỹ thuật Casio tìm min - max

MODE 7 − 3 ALPHA) x^2 − 6 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



- ➢ Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 3 khi $x = -1$



Vậy $m \geq 3$

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Tính đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m$
- Để hàm số đồng biến thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m \geq 0$ với mọi $x \in R$ (*)
  $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Kiến thức (*) áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2 : "Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\Delta \leq 0$ thì dấu của tam thức bậc 2 luôn cùng dấu với a" .

<u>VD3</u>-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$

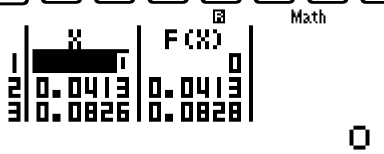
A. $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$ **B.** $m < 2$ **C.** $1 \leq m < 2$ **D.** $m \geq 2$

Hướng dẫn giải

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- ➢ Để bài toán dễ nhìn hơn ta tiến hành đặt ẩn phụ : Đặt $\tan x = t$. Đổi biến thì phải tìm miền giá trị của biến mới. Để làm điều này ta sử dụng chức năng MODE 7 cho hàm $f(x) = \tan x$.

SHIFT MODE 4 MODE 7 tan ALPHA)) = = 0 = SHIFT $\times 10^x$ ÷ 4 = (SHIFT $\times 10^x$ ÷ 4) ÷ 1 9 =



Ta thấy $0 \leq \tan x \leq 1$ vậy $t \in (0;1)$

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

- ➢ Tính đạo hàm : $y' = \dfrac{(t-m)-(t-2)}{(t-m)^2} = \dfrac{2-m}{(t-m)^2}$

$y'>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0 \Leftrightarrow m<2$ (1)

- Kết hợp điều kiện xác định $t-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq t \Rightarrow m\notin(0;1)$ (2)

  Từ (1) và (2) ta được $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

❖ **Bình luận** :

- Bài toán chứa tham só m ở dưới mẫu thường đánh lừa chúng ta. Nếu không tỉnh táo chúng ta sẽ chọn luôn đáp án **B**
- Tuy nhiên điểm nhấn của bài toán này là phải kết hợp điều kiện ở mẫu số. $m\neq t$ mà $t\in(0;1)$ vậy $m\notin(0;1)$.

VD4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên R

A. $m\ge 2017$ **B.** $m<0$ **C.** $m\ge \dfrac{1}{2017}$ **D.** $m\ge -\dfrac{1}{2017}$

Hướng dẫn giải

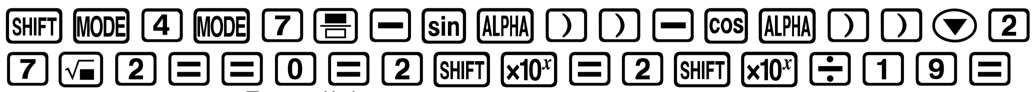
❖ **Cách 1 : CASIO**

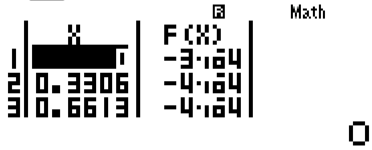
- Tính đạo hàm $y'=\cos x+\sin x+2017\sqrt{2}m$

  $y'\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{-\sin x-\cos x}{2017\sqrt{2}}=f(x)$

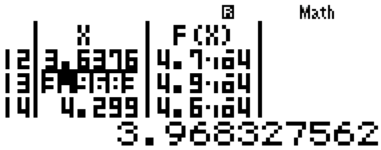
  Để hàm số luôn đồng biến trên R thì $m\ge f(x)$ đúng với mọi $x\in R$ hay $m\ge f(\max)$

- Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số ta lại sử dụng chức năng MODE 7. Vì hàm $f(x)$ là hàm lượng giác mà hàm lượng giác $\sin x,\cos x$ thì tuần hoàn với chu kì 2π vậy ta sẽ thiết lập Start 0 End 2π Step $\dfrac{2\pi}{19}$





Quan sát bảng giá trị của $F(X)$ ta thấy $f(\max)=f(3.9683)\approx 5.10^{-4}$



Đây là 1 giá trị $\approx \dfrac{1}{2017}$ vậy $m\ge \dfrac{1}{2017}$ $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính đạo hàm $y'=\cos x+\sin x+2017\sqrt{2}m$. $y'\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{-\sin x-\cos x}{2017\sqrt{2}}=f(x)$
- Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì $(-\sin x-\cos x)^2\le\left((-1)^2+(-1)^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \le (-\sin x - \cos x) \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{-\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} \le f(x) \le \dfrac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}}$

$f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2017}$ $\Rightarrow m \ge f(\max) = \dfrac{1}{2017}$

❖ **Bình luận :**

- Vì chu kì của hàm $\sin x, \cos x$ là 2π nên ngoài thiết lập Start 0 End 2π thì ta có thể thiết lập Start $-\pi$ End $-\pi$
- Nếu chỉ xuất hiện hàm $\tan x$, $\cot x$ mà hai hàm này tuần hoàn theo chu kì π thì ta có thể thiết lập Start 0 End π Step $\dfrac{\pi}{19}$

VD5-[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 2.

A. $m = 0$ **B.** $m < 3$ **C.** $m = 2$ **D.** $m > 3$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Tính $y' = 3x^3 + 6x^2 + m$

Ta nhớ công thức tính nhanh "Nếu hàm bậc 3 nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng α thì phương trình đạo hàm có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm bằng α"

Với α là một số xác định thì m cũng là 1 số xác định chứ không thể là khoảng $\Rightarrow$ Đáp số phải là **A** hoặc **C** .

Với $m = 0$ phương trình đạo hàm $3x^2 + 6x = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$ và khoảng cách giữa chúng bằng 2

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính $y' = 3x^3 + 6x^2 + m$. Để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 thì phương trình đạo hàm có 2 nghiệm x_1, x_2 và $|x_1 - x_2| = 0$
- Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$
- Giải $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow 4 - \dfrac{4m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Mệnh đền nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong các hàng số sau, hãy chỉ ra hàm số giảm (nghịch biến) trên R

A. $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x}$ **B.** $y=\left(\frac{5}{3e}\right)^{-x}$ **C.** $y=(\pi)^{3x}$ **D.** $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{x}$

Bài 3-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m-1)x+1}{2x+m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A. $m<2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ **C.** $m\neq 2$ **D.** $-1<m<2$

Bài 4-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$

A. $m\geq\frac{5}{2}$ **B.** $m\leq\frac{5}{2}$ **C.** $m\leq\frac{5}{4}$ **D.** $m\geq\frac{5}{4}$

Bài 5-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+m\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. $m>0$ **B.** $m<\frac{3}{2}$ **C.** $m\geq\frac{3}{2}$ **D.** $m>\frac{3}{2}$

Bài 6-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y=mx^3-x^2+3x+m-2$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. $m=0$ **B.** $m=\pm 1$ **C.** $3m\neq\pm 1$ **D.** $m=1$

Bài 7-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trong khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

A. $m\in[-1;2]$ **B.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ **C.** $m\in(1;2)$ **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup[1;2)$

Bài 8-[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ **B.** $m>6$ **C.** $m<0$ **D.** $m=9$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

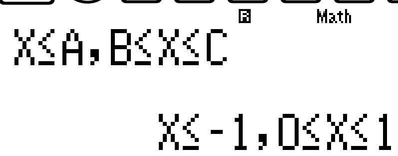
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Hướng dẫn giải

- Giải bất phương trình đạo hàm với lệnh MODE 5 INEQ

MODE ▼ 1 2 3 − 4 = 0 = 4 = 0 = =



- Rõ ràng hàm số đồng biến trên miền $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong các hàng số sau, hãy chỉ ra hàm số giảm (nghịch biến) trên R

A. $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{5}{3e}\right)^{-x}$ **C.** $y=(\pi)^{3x}$ **D.** $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$

Hướng dẫn giải

- Hàm số ngịch biến trên R tức là luôn giảm
- Kiểm tra tính nghịch biến $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ của hàm với chức năng MODE 7 Start -9 End 10 Step 1

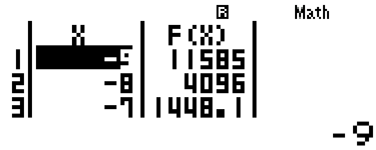
MODE 7 (▭/▭ SHIFT x10ˣ ▼ 3 ►) x■ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta thấy $f(x)$ luôn tăng $\Rightarrow$ A sai

- Tương tự như vậy , với hàm $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$ ta thấy $f(x)$ luôn giảm $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

MODE 7 (▭/▭ 1 ▼ 2 √■ 2 ► ►) x■ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Bài 3-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

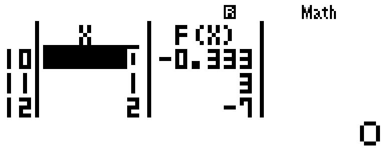
Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m-1)x+1}{2x+m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A. $m<2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ **C.** $m\neq 2$ **D.** $-1<m<2$

Hướng dẫn giải

- Chọn $m=-3$. Khảo sát hàm $y=\frac{(-3-1)x+1}{x-3}$ với chức năng MODE 7

MODE 7 ▭/▭ (− 3 − 1) ALPHA) + 1 ▼ 2 ALPHA) − 3 = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=-3$ sai $\Rightarrow$ **A**, **B**, **C** đều sai

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Chú ý : Việc chọn m khéo léo sẽ rút ngắn quá trình thử đáp án

Bài 4-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

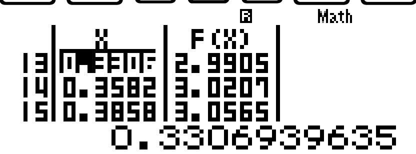
Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$

A. $m\ge\dfrac{5}{2}$ **B.** $m\le\dfrac{5}{2}$ **C.** $m\le\dfrac{5}{4}$ **D.** $m\ge\dfrac{5}{4}$

Hướng dẫn giải

- Chọn $m=3$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{3-\sin x}{\cos^2 x}$ với chức năng MODE 7

[SHIFT] [MODE] [4] [MODE] [7] [▭/▭] [3] [−] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▼] [cos] [ALPHA] [)] [)] [x^2] [=] [=] [0] [=] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [6] [=] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [6] [÷] [1] [9] [=]



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=3$ sai $\Rightarrow$ **A**, **D** đều sai

- Chọn $m=1.3$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{1.3-\sin x}{\cos^2 x}$ với chức năng MODE 7

[MODE] [7] [▭/▭] [1] [•] [3] [−] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▼] [cos] [ALPHA] [)] [)] [x^2] [=] [=] [0] [=] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [6] [=] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [6] [÷] [1] [9] [=]



Ta thấy hàm số luôn $\Rightarrow$ $m=1.3$ đúng $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác (Đáp án **C** không chứa 1.3 nên sai)

Bài 5-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

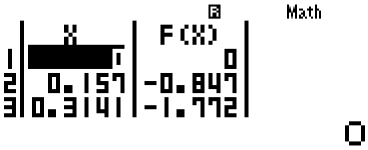
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+m\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $m>0$ **B.** $m<\dfrac{3}{2}$ **C.** $m\ge\dfrac{3}{2}$ **D.** $m>\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

- Chọn $m=5$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+5\sin x$ với chức năng MODE 7

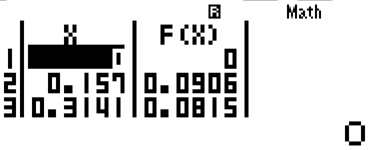
[MODE] [7] [2] [sin] [ALPHA] [)] [)] [$x^{\blacksquare}$] [3] [▶] [−] [3] [sin] [ALPHA] [)] [)] [x^2] [−] [5] [sin] [ALPHA] [)] [)] [=] [=] [0] [=] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [2] [=] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [2] [0] [=]



Ta thấy hàm số luôn giảm $\Rightarrow$ $m=-5$ sai $\Rightarrow$ **B** sai

- Chọn $m=1$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+\sin x$ với chức năng MODE 7

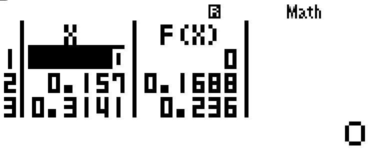
AC ◀ ◀ ◀ ◀ DEL DEL + = = = = =



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=1$ sai $\Rightarrow$ **A** sai

- Chọn $m=\frac{3}{2}$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+\frac{3}{2}\sin x$ với chức năng MODE 7

AC ◀ ◀ ◀ ◀ (3 ÷ 2) = = = = =



Ta thấy hàm số luôn tăng $\Rightarrow$ $m=\frac{3}{2}$ đúng $\Rightarrow$ **C** sai

Bài 6-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

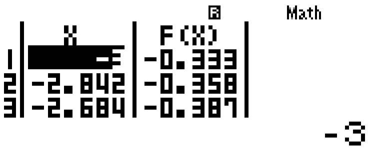
Tìm m để hàm số $y=mx^3-x^2+3x+m-2$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. $m=0$ **B.** $m=\pm1$ **C.** $3m\neq\pm1$ **D.** $m=1$

Hướng dẫn giải

- Tính đạo hàm $y'=3mx^2-2x+3$. Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 3mx^2-2x+3\geq0 \Leftrightarrow m\geq\frac{2x-3}{3x^2}=f(x)$
- Vậy $m\geq f(\max)$ trên miền $(-3;0)$. Tìm $f(\max)$ bằng lệnh MODE 7

MODE 7 (fraction) 2 ALPHA) − 3 ▼ 3 ALPHA) x^2 = = − 3 = 0 = 3 ÷ 1 9 =



Ta thấy $f(\max)=0.3333...=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $m\geq\frac{1}{3}$ sai $\Rightarrow$ **D** là đáp số chính xác

Bài 7-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

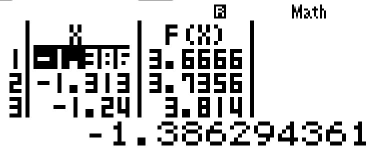
Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trong khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

A. $m\in[-1;2]$ **B.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ **C.** $m\in(1;2)$ **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup[1;2)$

Hướng dẫn giải

- Chọn $m=1$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{e^x-1-2}{e^x-1^2}$ với chức năng MODE 7

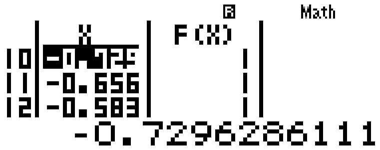
[MODE] [7] [▭/▭] [ALPHA] [×10^x] [x^■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [−] [2] [▼] [ALPHA] [×10^x] [x^■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [x²] [=] [=] [ln] [1] [÷] [4] [)] [=] [0] [=] [−] [ln] [1] [÷] [4] [)] [÷] [1] [9] [=]



Ta thấy hàm số luôn tăng trên $\Rightarrow$ $m=1$ nhận $\Rightarrow$ **A**, **D** có thể đúng

- Chọn $m=-1$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{e^x-(-1)-2}{e^x-(-1)^2}$ với chức năng MODE 7

[AC] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [(] [−] [▶] [)] [▼] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [(] [−] [▶] [)] [=] [=] [=] [=] [=]



Ta thấy hàm số luôn không đổi (hàm hằng) $\Rightarrow$ $m=-1$ loại $\Rightarrow$ **A** sai và **D** là đáp số chính xác

<u>Bài 8</u>-[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ **B.** $m>6$ **C.** $m<0$ **D.** $m=9$

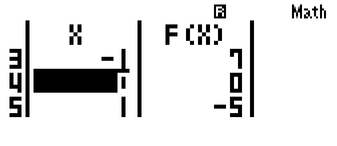
Hướng dẫn giải

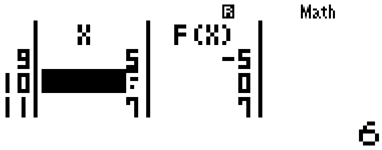
- Tính $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$. Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$
- Khoảng nghịch biến lớn hơn 3 $\Rightarrow |x_1-x_2|>3 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2>9 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-9>0$

$\Leftrightarrow (1-m)^2-4(m-2)-9>0$

Sử dụng MODE 7 với Start -3 End 10 Step 1 để giải bất phương trình trên

[MODE] [7] [(] [1] [−] [ALPHA] [)] [)] [x²] [−] [4] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [−] [9] [=] [=] [−] [3] [=] [1] [0] [=] [1] [=]





Ta nhận được $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **A** là đáp số chính xác

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 3. CỰC TRỊ HÀM SỐ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Điểm cực đại, cực tiểu : Hàm số f liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó :

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

2.Lệnh Casio tính đạo hàm [SHIFT] [∫]

2) VÍ DỤ MINH HỌA

<u>VD1</u>-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Cho hàm số $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

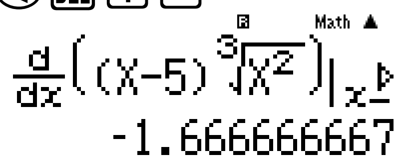
A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$
D. Hàm số không có cực tiểu

Hướng dẫn giải

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➢ Để kiểm tra đáp án **A** ta tính đạo hàm của y tại $x=1$ (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)

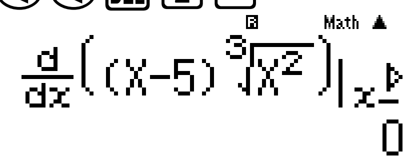
[◀] [DEL] [1] [=]



Ta thấy đạo hàm $y'(1)\neq 0$ vậy đáp số **A** sai

➢ Tương tự với đáp án **B** (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)

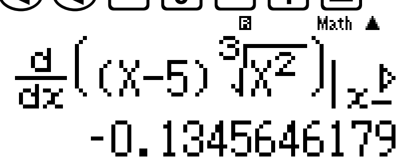
[◀] [◀] [DEL] [2] [=]



Ta thấy $y'(2)=0$. Đây là điều kiện cần để $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số y

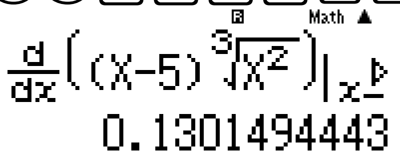
Kiểm tra $y'(2-0.1)=-0.1345...<0$

[◀] [◀] [−] [0] [.] [1] [=]



Kiểm tra $y'(2+0.1)=0.1301...>0$

◀ ◀ DEL DEL DEL DEL + 0 • 1 =



Tóm lại $f'(2)=0$ và dấu của y' đổi từ $-$ sang $+$ vậy hàm số y đạt cực tiểu tại $x=2$

$\Rightarrow$ Đáp án **B** là chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính đạo hàm : $y'=\sqrt[3]{x^2}+(x-5).\frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3x+2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$
- Ta có $y'=0\Leftrightarrow 5(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$
- $y'>0\Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0\\x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0\\x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.$

  $y'<0\Leftrightarrow 0<x<2$

  Vậy $y'(2)=0$ và y' đổi dấu từ âm sang dương qua điểm $x=2$

❖ **Bình luận :**

- Trong các bài toán tính đạo hàm phức tạp thì cách Casio càng tỏ ra có hiệu quả vì tránh được nhầm lẫn khi tính đạo hàm và xét dấu của đạo hàm.

VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Với giá trị nguyên nào của k thì hàm số $y=kx^4+(4k-5)x^2+2017$ có 3 cực trị

A. $k=1$ **B.** $k=2$ **C.** $k=3$ **D.** $k=4$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

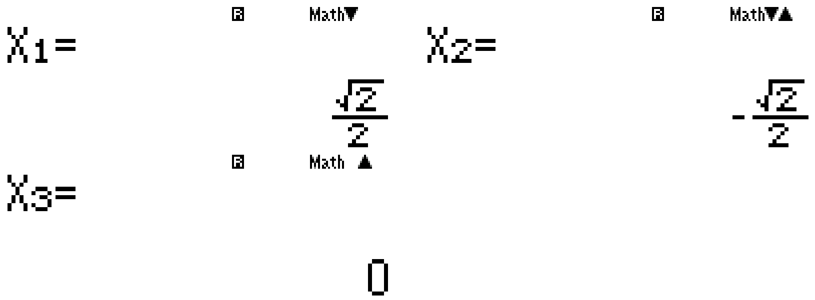
➢ Tính đạo hàm $y'=4kx^3+2(4k-5)x$

Ta hiểu : Để hàm số y có 3 cực trị thì $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi đó đương nhiên sẽ không có nghiệm kép nào)

Ta chỉ cần giải phương trình bậc 3 : $4kx^3+2(4k-5)x=0$ với $a=4k,b=0,c=8k-10,d=0$. Để làm việc này ta sử dụng máy tính Casio với chức năng giải phương trình bậc 3 : MODE 5

➢ Thử đáp án A với $k=1$

MODE 5 4 4 = 0 = 8 − 1 0 = 0 = =



Ta thu được 3 nghiệm $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2};x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2};x_3=0$

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Tính đạo hàm $y' = 4kx^3 + 2(4k-5)x$

▪ Ta hiểu : Để hàm y có 3 cực trị thì $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi đó đương nhiên sẽ không có nghiệm kép nào)

▪ $y'=0 \Leftrightarrow 4kx^3 + 2(4k-5)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4kx^2 - (10-8k) = 0 \ \ (2) \end{array}\right.$

Để $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{18-8k}{4k} > 0 \Leftrightarrow 0 < k < 2$

Vậy $k=1$ thỏa mãn

❖ **Bình luận :**

- Đạo hàm là phương trình bậc 3 có dạng $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$ nếu có 3 nghiệm thì sẽ tách được thành $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$ nên vế trái luôn đổi dấu qua các nghiệm. $\Rightarrow$ Có 3 cực trị

  Tuy nhiên nếu đạo hàm là phương trình bậc 3 chỉ có 2 nghiệm thì sẽ tách thành $a(x-x_1)(x-x_2)^2 = 0$ và sẽ có 1 nghiệm kép. $\Rightarrow$ có 1 cực trị

  Mở rộng thêm : nếu đạo hàm là 1 phương trình bậc 3 có 1 nghiệm thì chỉ đổi dấu 1 lần $\Rightarrow$ có 1 cực trị

VD3-[Thi thử THPT Kim Liên – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Số điểm cực trị của hàm số $y = |x|^3 - 4x^2 + 3$ bằng :

A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

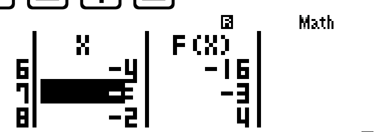
❖ **Cách 1 : T. CASIO**

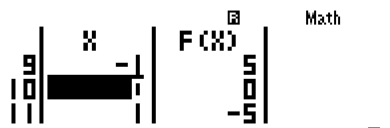
➢ Tính đạo hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối $\left(|x|^3\right)' = \left[\left(\sqrt{x^2}\right)^3\right]' = \left[\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{2}\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}.2x = 3x|x|$

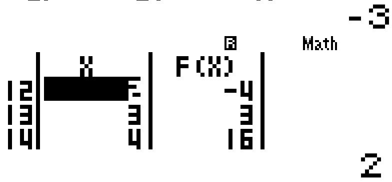
Vậy $y' = \left(|x|^3 - 4x^2 + 3\right)' = 3x|x| - 8x$

➢ Số điểm cực trị tương ứng với số nghiệm của phương trình $y'=0$. Ta sử dụng chức năng MODE 7 để dò nghiệm và sự đổi dấu của y' qua nghiệm.

MODE 7 3 ALPHA) SHIFT hyp ALPHA) ▶ − 8 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =







Ta thấy y' đổi dấu 3 lần $\Rightarrow$ Có 3 cực trị

$\Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác

VD4-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

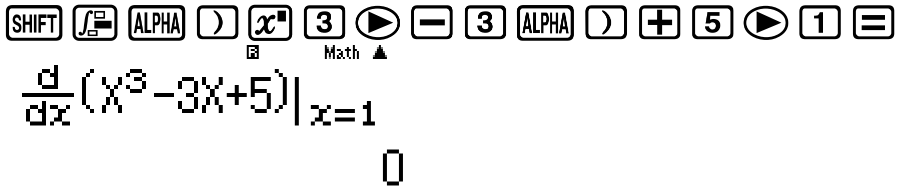
Tìm tất các các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 + 5$ đạt cực đại tại $x = 1$

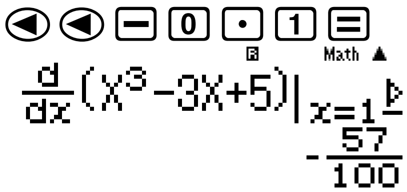
A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 0$

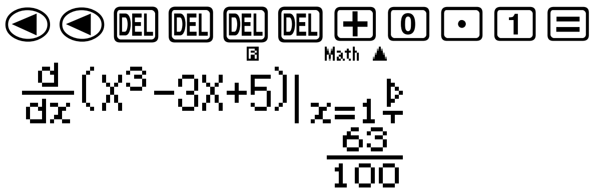
Hướng dẫn giải

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➢ Kiểm tra khi $m = 0$ thì hàm số có đạt cực đại tại $x = 1$ không.



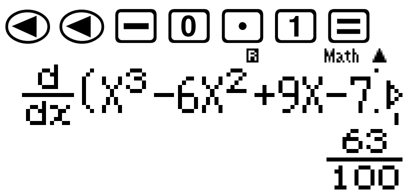


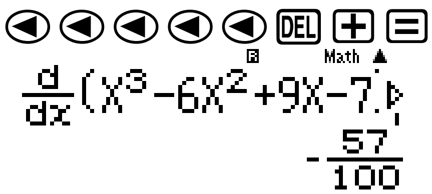


Vậy y' đổi dấu từ âm sang dương qua giá trị $x = 1$ $\Rightarrow m = 0$ loại $\Rightarrow$ Đáp án **A** hoặc **D** sai

➢ Tương tự kiểm tra khi $m = 2$







Ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm $\Rightarrow$ hàm y đạt cực đại tại $x = 1$ $\Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Tính đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 1\right)$
- Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right.$

Điều kiện cần : $x = 1$ là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1 = 1 \\ m + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 0 \end{array}\right.$

- Thử lại với $m=2$ khi đó $y'=3x^2-12x+9$.

  $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

  $y'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right.$ và $y'<0 \Leftrightarrow 1<x<3$

  Vậy y' đổi dấu từ dương sang âm qua điểm $x=1$ $\Rightarrow$ Hàm y đạt cực đại tại $x=1$

❖ **Bình luận :**

- Việc chọn giá trị m một cách khéo léo sẽ giúp chúng ta rút ngắn quá trình chọn để tìm đáp án đúng.

VD5-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Cho hàm số $y=a\sin x+b\cos x+x$ $\left(0<x<2\pi\right)$ đạt cực đại tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\pi$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b\sqrt{3}$

A. $T=2\sqrt{3}$ **B.** $T=3\sqrt{3}+1$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

➢ Tính đạo hàm $y'=\left(a\sin x+b\cos x+x\right)'=a\cos x-b\sin x+1$

Hàm số đạt cực trị tại $x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow a\cos\dfrac{\pi}{3}-b\sin\dfrac{\pi}{3}+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+1=0$ (1)

Hàm số đạt cực trị tại $x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow a\cos\pi-b\sin\pi+1=0 \Leftrightarrow -a-0b+1=0$ (2)

Từ (2) ta có $a=1$. Thế vào (1) $\Rightarrow$ $b=\sqrt{3}$

Vậy $T=a+b\sqrt{3}=4$ $\Rightarrow$ Đáp án **D** là chính xác

VD6-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$

A. $2x+3y+9=0$ **B.** $2x+3y-6=0$ **C.** $2x-3y+9=0$ **D.** $-2x+3y+6=0$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi 2 điểm cực trị của đồ thị là $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$. Ta không quan tâm đâu là điểm cực đại, đâu là điểm cực tiểu. Chúng ta chỉ cần biết đường thẳng cần tìm sẽ đi qua 2 điểm cực trị trên.

$x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $y'=0$. Để tìm 2 nghiệm này ta sử dụng chức năng giải phương trình bậc 2 MODE

MODE 5 3 1 = − 4 = 3 = =

X1=

3

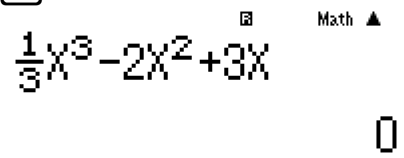
X2=

1

Ta tìm được $x_1 = 3; x_2 = 1$

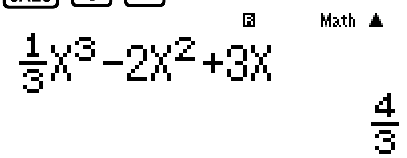
➢ Để tìm $y_1; y_2$ ta sử dụng chức năng gán giá trị CALC

[■/□] [1] [▼] [3] [▶] [ALPHA] [)] [x■] [3] [▶] [−] [2] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [CALC] [3] [=]



Khi $x = 3$ thì $y = 0$ vậy $A(3;0)$

[CALC] [1] [=]



Khi $x = 1$ thì $y = \frac{4}{3}$ vậy $B\left(1;\frac{4}{3}\right)$

Ta thấy đường thẳng $2x + 3y - 6 = 0$ đi qua A và B $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là phần dư của phép chia y cho y'
- Tính $y' = x^2 - 4x + 3$

Thực hiện phép chia được : $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)\left(x^2 - 4x + 3\right) - \frac{2}{3}x - 2$

Vậy phương trình cần tìm có dạng $y = -\frac{2}{3}x + 2 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Cách Casio có vẻ hơi dài hơn nhưng lại có ưu điểm tránh phải thực hiện phép chia y cho y'.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

<u>Bài 1</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại :

A. $x = -1$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 0$ **D.** $x = -2$

<u>Bài 2</u>-[Thi thử THPT Yên Thế – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Giá trị của m để hàm số $y = -x^3 - 2x^2 + mx + 2m$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ là :

A. $m < -1$ **B.** $m \neq -1$ **C.** $m = -1$ **D.** $m > -1$

<u>Bài 3</u>-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

<u>Bài 4</u>-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

Đồ thị hàm số $y = e^x\left(x^2 - 3x - 5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

<u>Bài 5</u>-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y = |x|^3 - x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Bài 6-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là :

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Bài 7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây.

Bài 8-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ có 2 điểm cực trị trái dấu .

A. $m<0$ **B.** $0<m<3$ **C.** $m<3$ **D.** Không có m thỏa

Bài 9-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2$ có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu

A. $m<1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $m<0$ **D.** $m\ge 1$

Bài 10-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất cả các tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-m-2$ có 2 cực trị nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là trục hoành

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(-\infty;-1)\backslash\{-5\}$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $(-\infty;1)\backslash\{-5\}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

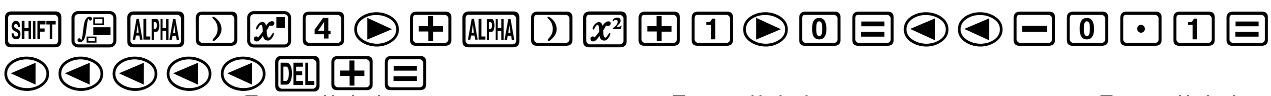
Bài 1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

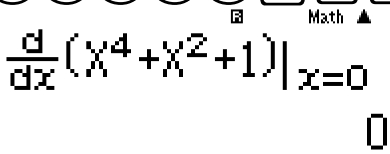
Hàm số $y=x^4+x^2+1$ đạt cực tiểu tại :

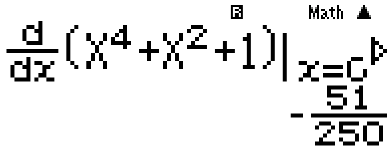
A. $x=-1$ **B.** $x=1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-2$

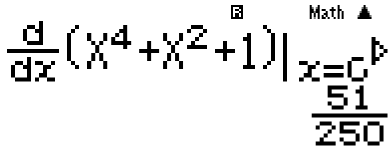
Hướng dẫn giải

- Ngoài cách thử lần lượt từng đáp án để lấy kết quả. Nếu ta áp dụng một chút tư duy thì phép thử sẽ diễn ra nhanh hơn. Đồ thị hàm bậc 4 đối xứng nhau qua trục tung. Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ thì sẽ đạt cực tiểu tại $x=1$. $\Rightarrow$ Đáp án A và B loại vì ta chỉ được chọn 1 đáp án.
- Thử với $x=0$









Ta thấy $f'(0)=0$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow$ $x=-1$ là cực tiểu $\Rightarrow$Đáp án **C** chính xác

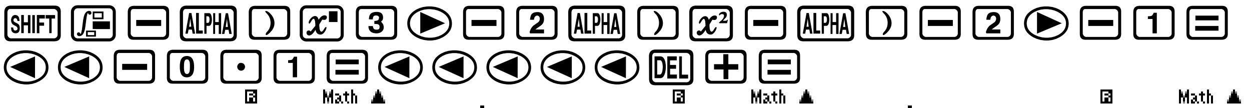
Bài 2-[Thi thử THPT Yên Thế – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

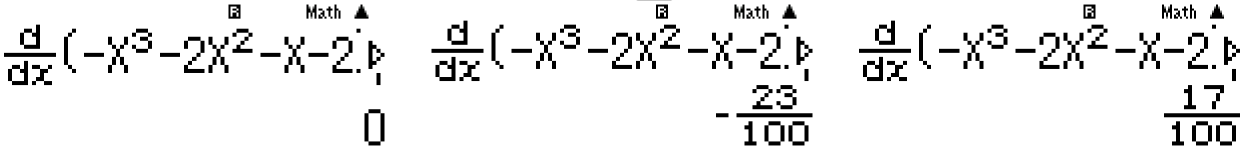
Giá trị của m để hàm số $y=-x^3-2x^2+mx+2m$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ là :

A. $m<-1$ **B.** $m\neq -1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m>-1$

Hướng dẫn giải

- Thử đáp án, ưu tiên thử giá trị xác định trước. Với đáp án C khi $m=-1$ $\Rightarrow y=-x^3-2x^2-x-2$





Ta thấy $f'(-1)=0$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow$ $x=-1$ là cực tiểu $\Rightarrow$Đáp án **C** chính xác

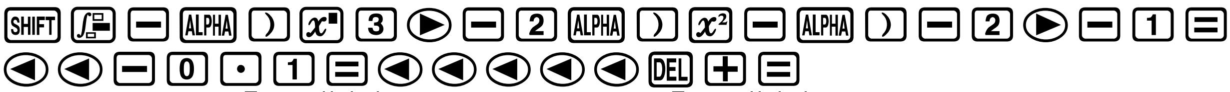
Bài 3-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

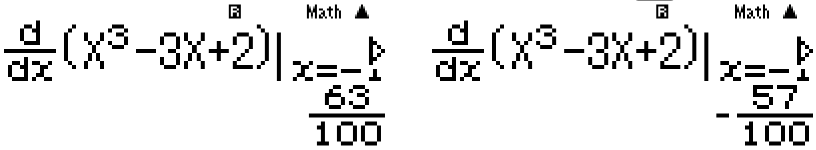
Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=3x^2-3$. Tìm điểm cực đại của hàm số là nghiệm phương trình $y'=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$
- Khảo sát sự đổi dấu qua điểm cực trị $x=-1$ bằng cách tính $f'(-1-0.1)$ và $f'(-1+0.1)$





Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm $\Rightarrow$ $x=-1$ là điểm cực đại của hàm số

- Giá trị cực đại $f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$ $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Bài 4-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

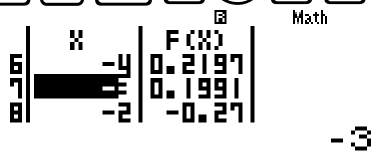
Đồ thị hàm số $y=e^x\left(x^2-3x-5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

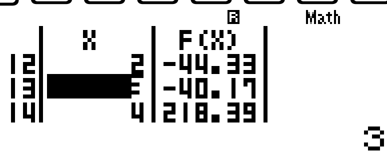
A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=e^x\left(x^2-3x-5\right)+e^x(2x-3)$
- Dùng MODE 7 để tìm điểm cực trị và khảo sát sự đổi dấu qua điểm cực trị

MODE 7 ALPHA x10^x x^■ ALPHA) ▶ (ALPHA) x² − 3 ALPHA) − 5) + ALPHA x10^x x^■ ALPHA) ▶ (2 ALPHA) − 3) = = − 9 = 1 0 = 1 =





Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần $\Rightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị

$\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Bài 5-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

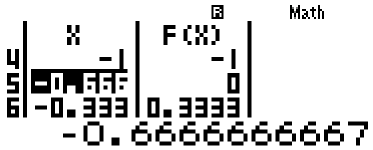
Hàm số $y=|x|^3-x^2+4$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

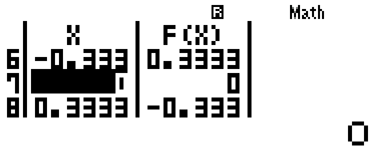
A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

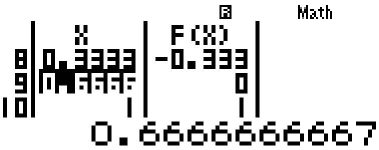
Hướng dẫn giải

- Tính $y'=3x|x|-2x$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$. Dùng MODE 7 với thiết lập sao cho x chạy qua 3 giá trị này ta sẽ khảo sát được sự đổi dấu của y'

MODE 7 3 ALPHA) SHIFT hyp ALPHA) ▶ − 2 ALPHA) = − DEL = − 2 = 2 = 1 ÷ 3 =







Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 3 lần $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **C** chính xác

Bài 6-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

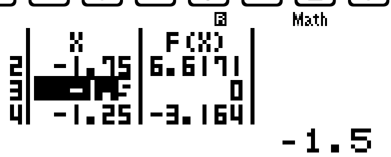
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là :

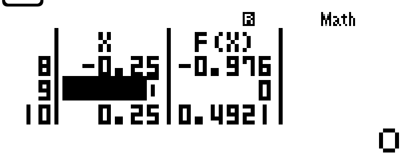
A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$. Dùng MODE 7 với thiết lập sao cho x chạy qua 3 giá trị này ta sẽ khảo sát được sự đổi dấu của y'

MODE 7 ALPHA) (ALPHA) − 1) x² (2 ALPHA) + 3) = = − 2 = 1 . 5 = 0 . 2 5 =





Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Chú ý : Nếu quan sát tinh tế thì ta thấy ngay $(x-1)^2$ là lũy thừa bậc chẵn nên y' không đổi dấu qua $x=1$ mà chỉ đổi dấu qua hai lũy thừa bậc lẻ x (hiểu là x^1) và $2x+3$ (hiểu là $(2x+3)^1$)

Bài 7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây.

A. $2x-y-4=0$ **B.** $2x-y+4=0$ **C.** $2x+y+4=0$ **D.** $2x+y-4=0$

Hướng dẫn giải

- Hàm số có dạng $y=(x-1)(x+2)^2 \Leftrightarrow y=x^3+3x^2-4$ Có đạo hàm $y'=3x^2+6x$.

  $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=4 \end{array}\right.$

- Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M(-2;0), N(0;4)$. Trung điểm của hai điểm cực trị này là $I(-1;2)$. Điểm này thuộc đường thẳng $2x+y+4=0$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 8-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ có 2 điểm cực trị trái dấu .

A. $m<0$ **B.** $0<m<3$ **C.** $m<3$ **D.** Không có m thỏa

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=3x^2-6x+m$. Để hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Rightarrow$ Tích hai nghiệm là số âm $\Leftrightarrow \frac{m}{3}<0 \Leftrightarrow m<0$ $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Chú ý : Nếu quên định lý Vi-et ta có thể dùng phép thử. Với đáp án A chọn $m=-5$ chẳng hạn sẽ thấy luôn $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm này đổi dấu.

Bài 9-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2$ có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu

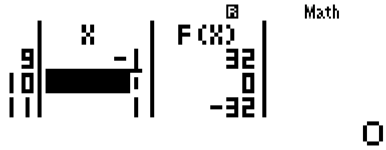
A. $m<1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $m<0$ **D.** $m\ge 1$

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=4mx^3+2(m-1)x$. Để hàm số có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu thì $y'=0$ có đúng 1 nghiệm và $y'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua điểm đó.

- Chọn $m=-5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

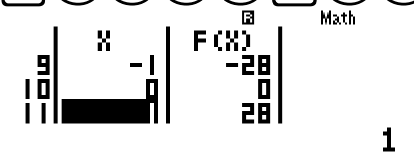
MODE 7 4 × (− 5) ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + 2 (− 5 − 1) ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm $\Rightarrow m=-5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án đúng có thể là **A**, **B**, **C**

- Chọn $m=5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

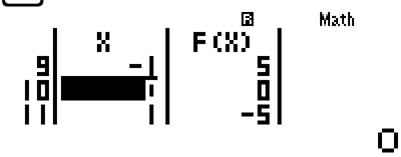
AC ▶ ▶ ▶ ▶ DEL ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL = = = = =



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ âm sang dương $\Rightarrow m=5$ loại $\Rightarrow$ Đáp án **B** sai

- Chọn $m=0.5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

AC ▶ ▶ ▶ − 0 • ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ − 0 • = = = = =



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm $\Rightarrow m=0.5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án **A** chính xác

Bài 10-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

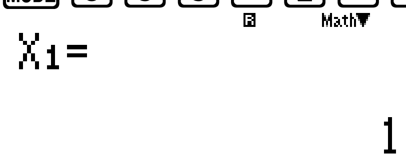
Tìm tập hợp tất cả các tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-m-2$ có 2 cực trị nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là trục hoành

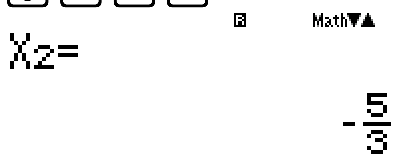
A. $(-\infty;0)$ **B.** $(-\infty;-1)\setminus\{-5\}$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $(-\infty;1)\setminus\{-5\}$

Hướng dẫn giải

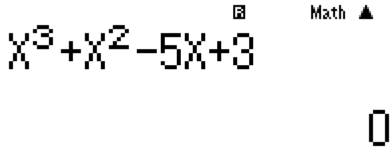
- Tính $y'=3x^2+2x+m$. Để hàm số có đúng 2 cực đại thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1-3m>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Cả 4 đáp án đều thỏa
- Chọn $m=-5$. Hàm số có dạng $y=x^3+x^2-5x+3$. Tính hai điểm cực trị của hàm số bằng lệnh giải phương trình MODE 5

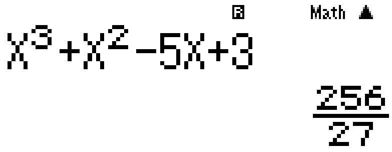
MODE 5 3 3 = 2 = − 5 = = =





Từ đó suy ra $f\left(x_1\right)=f\left(1\right)=0; f\left(x_2\right)=f\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{256}{27}$

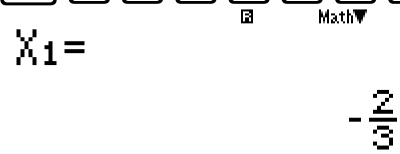




Để hai cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)<0$. $\Rightarrow m=-5$ loại $\Rightarrow$ **B** hoặc **D** có thể đúng.

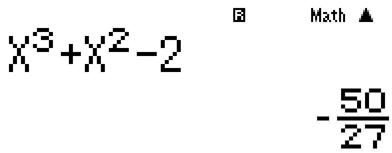
- Chọn $m=0$. Hàm số có dạng $y=x^3+x^2-2$. Tính hai điểm cực trị của hàm số bằng lệnh giải phương trình MODE 5

MODE 5 3 3 = 2 = 0 = = =





Từ đó suy ra $f\left(x_1\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{50}{27}; f\left(x_2\right)=f\left(0\right)=-2$





- Để hai cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)<0$. $\Rightarrow m=0$ loại $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 4. TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm : Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và một điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm M là đường thẳng d có phương trình : $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

2.Lệnh Casio : qy

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{x} - \ln x$ tại điểm có hoành độ bằng 2

A. $\frac{1}{2} - \ln 2$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{4}$

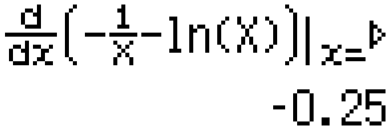
Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

➢ Sử dụng máy tính Casio để tính hệ số góc tiếp tuyên tại điểm có hoành độ bằng 2 $\Rightarrow k = f'(2)$





➢ Ta thấy $k = f'(2) = -0.25 = -\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 2-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y = -2x + 1$ **B.** $y = 3x - 2$ **C.** $y = 2x + 1$ **D.** $y = -3x - 2$

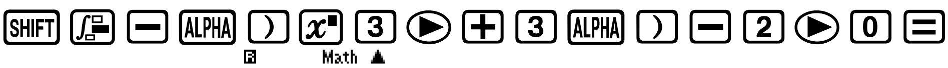
Hướng dẫn giải

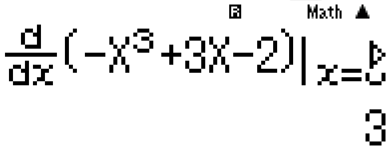
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

➢ M là giao điểm của đồ thị (C) và trục tung $\Rightarrow$ M có tọa độ $(0;-2)$

Tính $f'(0) = 0$





- Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y=3(x-0)-2 \Leftrightarrow y=3x-2$

  $\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]

Số tiếp tuyến với đồ thị (C) : $y=x^3-3x^2+2$ đi qua điểm $M(1;0)$ là :

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$
- Thế $f'(x_0)$ vào phương trình tiếp tuyến được $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

  Tiếp tuyến đi qua điểm $M(1;0)$ $\Rightarrow 0=(3x_0^2-6x_0)(1-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

  $\Leftrightarrow -2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0$

  Sử dụng máy tính với lệnh MODE 5 để giải phương trình bậc 3 trên

  MODE 5 − 4 − 2 = 6 = − 6 = 2 =



- Ta thấy có 1 nghiệm x_0 $\Rightarrow$ Chỉ có 1 tiếp tuyến duy nhất.

  $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) với hệ số góc nhỏ nhất

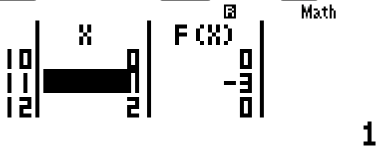
A. $y=-3x+3$ **B.** $y=-3x-3$ **C.** $y=-3x$ **D.** $y=0$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của k bằng chức năng MODE 7

  MODE 7 3 ALPHA) x^2 − 6 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



  Ta thấy $f'(\min)=f'(1)=-3 \Rightarrow x_0=-3 \Rightarrow y_0=1^3-3.1^2+2=0$

- Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y=-3(x-1)+0 \Leftrightarrow y=-3x+3$

  $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ (C) Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của (C) đến một tiếp tuyến bất kì của (C) . Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là :

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0+1)^2}$.

Thế k, y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=-\dfrac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_0+1)^2}x+y-\dfrac{x_0}{(x_0+1)^2}-\dfrac{x_0+2}{x_0+1}=0$

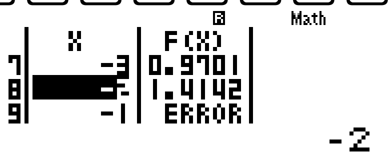
➢ Hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên giao điểm hai tiệm cận là $I(-1;1)$.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

$$h=d(I;(d))=\frac{\left|\dfrac{1}{(x_0+1)^2}(-1)+1-\dfrac{x_0}{(x_0+1)^2}-\dfrac{x_0+2}{x_0+1}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{(x_0+1)^2}\right)^2+1^2}}$$

Dùng máy tính Casio với lệnh MODE 7 để tính các giá trị lớn nhất này.

MODE 7 [phân số] SHIFT hyp [phân số] − 1 ▼ (ALPHA) + 1) x² ▶ + 1 − [phân số] ALPHA) ▼ (ALPHA) + 1) x² ▶ − [phân số] ALPHA) + 2 ▼ ALPHA) + 1 ▼ √ ([phân số] 1 ▼ (ALPHA) + 1) x² ▶) x² + 1 = = − 9 = 1 0 = 1 =



➢ Ta thấy $h(\max)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

Bài 6-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (H) , M là điểm bất kì và $M\in(H)$. Tiếp tuyến với (H) tại M tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích bằng :

A. 4 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 2

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$.

Thế k, y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$ (d)

➢ Hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=2$ và giao điểm 2 tiệm cận là $I(1;2)$

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận đứng $\Rightarrow E\left(1;\frac{2x_0}{x_0-1}\right)$

Gọi F là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận ngang $\Rightarrow F\left(2x_0-1;2\right)$

- Độ dài $IE=\left|\overrightarrow{IE}\right|=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{2x_0}{x_0-1}-2\right)}=\frac{2}{|x_0-1|}$

Độ dài $IF=\sqrt{(2x_0-1-1)^2+(2-2)^2}=2|x_0-1|$ Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

- Diện tích ΔIEF $=\frac{1}{2}IE.IF=\frac{1}{2}.\frac{2}{|x_0-1|}.2|x_0-1|=2$ $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

BÀI TẬP T Ự LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng :

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

A. $(0;1),(2;3)$ **B.** $(1;0),(-3;2)$ **C.** $(-3;2)$ **D.** $(1;0)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

A. $y=3x$ **B.** $y=3x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-16$

A. $y=9x+16$ **B.** $y=9x+12$ **C.** $y=9x-10$ **D.** $y=9x-12$

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

A. $M(-2;0)$ **B.** $M\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$

Bài 6-[Thi tốt nghiệm THPT năm 2012]

Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2\,(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=x_0$ biết $f''(x_0)=-1$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$	**B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-\frac{5}{4} \\ y=-3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$	**C.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x-\frac{5}{4} \end{array}\right.$	**D.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x+\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$

LỜI GIẢI BÀI TẬP T Ự LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

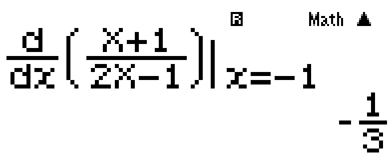
Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng :

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Hướng dẫn giải

- Hệ số góc của tiếp tuyến là đạo hàm tại tiếp điểm $\Rightarrow k=f'(-1)=-\frac{1}{3}$

SHIFT ∫ ▭ ALPHA) + 1 ▼ 2 ALPHA) − 1 ▶ ▶ − 1 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

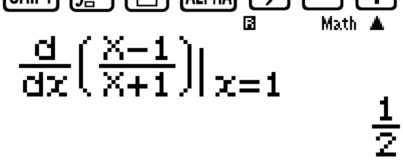
A. $(0;1),(2;3)$ **B.** $(1;0),(-3;2)$ **C.** $(-3;2)$ **D.** $(1;0)$

Hướng dẫn giải

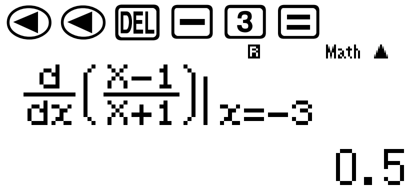
- Đề bài hỏi các điểm M nên ta dự đoán có 2 điểm , lại quan sát thấy đáp án **B** được cấu tạo từ đáp án **C** và **D** nên ta ưu tiên thử đáp án D trước.
- Tiếp tuyến song song với d nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng hệ số góc của d và bằng $\frac{1}{2}$

Tính $f'(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Điểm $M(1;0)$ là một tiếp điểm

SHIFT ∫ ▭ ALPHA) − 1 ▼ ALPHA) + 1 ▶ ▶ 1 =



Tính $f'(-3)=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Điểm $M(-3;2)$ là một tiếp điểm



$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

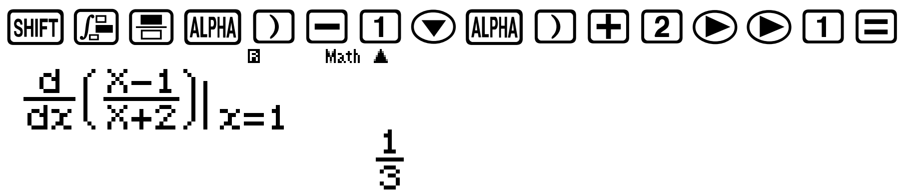
Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

A. $y=3x$ **B.** $y=3x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$
- M là giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành $\Rightarrow M(1;0)$ $\Rightarrow x_0=1; y_0=0$

Tính hệ số góc $k=f'(1)$



Thay vào ta có tiếp tuyến $y=\dfrac{1}{3}(x-1)+0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-16$

A. $y=9x+16$ **B.** $y=9x+12$ **C.** $y=9x-10$ **D.** $y=9x-12$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-3$
- Tiếp tuyến song song với $y=9x-16$ nên có hệ số góc $k=9 \Leftrightarrow 3x_0^2-3=9 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$

Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến : $y=9(x-2)+2 \Leftrightarrow y=9x-16$ Tính hệ số góc $k=f'(1)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\dfrac{1}{3}x^2-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

A. $M(-2;0)$ **B.** $M\left(-3;-\dfrac{16}{3}\right)$ **C.** $\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$ **D.** $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{8}\right)$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=x_0^2-1$
- Tiếp tuyến vuông góc với $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ nên có hệ số góc $k.\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1\Leftrightarrow k=3\Leftrightarrow x_0^2-1=3\Leftrightarrow x_0=\pm2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 6-[Thi tốt nghiệm THPT năm 2012]

Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2\,(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=x_0$ biết $f''(x_0)=-1$

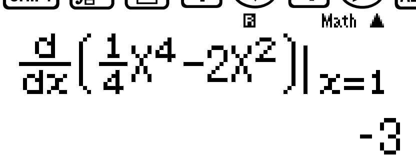
A. $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\dfrac{5}{4} \\ y=3x+\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-\dfrac{5}{4} \\ y=-3x+\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\dfrac{5}{4} \\ y=3x-\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x+\dfrac{5}{4} \\ y=3x+\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=x_0^4-4x_0$
- Ta có $f''(x)=3x_0^2-4 \Rightarrow 3x_0^2-4=-1\Leftrightarrow x_0^2=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1;\, y_0=-\dfrac{7}{4} \\ x_0=-1;\, y_0=-\dfrac{7}{4}\end{array}\right.$

Với $x_0=1$ Tính hệ số góc $k=f'(1)$

SHIFT ∫□ ▭ 1 ▼ 4 ▶ ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ − 2 ALPHA) x^2 ▶ 1 =

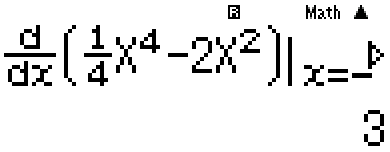


Thay vào ta có tiếp tuyến $y=-3(x-1)-\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow y=-3x+\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Với $x_0=-1$ Tính hệ số góc $k=f'(1)$

◀ ◀ ◀ − =



Thay vào ta có tiếp tuyến $y=3(x+1)-\frac{7}{4}\Leftrightarrow y=3x+\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 5. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Quy ước tính giơi hạn vô định :

- $x \to +\infty \Rightarrow x = 10^9$
- $x \to -\infty \Rightarrow x = -10^9$
- $x \to x_0^+ \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$
- $x \to x_0^- \Rightarrow x = x_o - 10^{-6}$
- $x \to x_0 \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$

2.Giơi hạn hàm lượng giác : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

3.Giới hạn hàm siêu việt : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4.Lệnh Casio : r

2) VÍ DỤ MINH HỌA

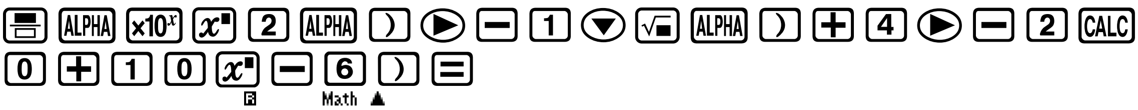
Bài 1-[Thi thử THPT chuyên Ngữ lần 1 năm 2017] Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+4} - 2}$ bằng :

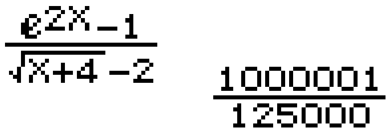
A. 1 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 4

Hướng dẫn giải

❖ Cách 1 : CASIO

➢ Vì $x \to 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$ Sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC





➢ Ta nhận được kết quả $\dfrac{1000001}{125000} \approx 8$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Chú ý : Vì chúng ta sử dụng thủ thuật để tính giới hạn , nên kết quả máy tính đưa ra chỉ xấp xỉ đáp án , nên cần chọn đáp án gần nhất.

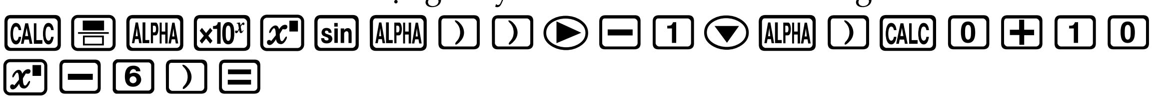
Bài 2-[Thi thử chuyên Amsterdam lần 1 năm 2017] Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x}$ bằng :

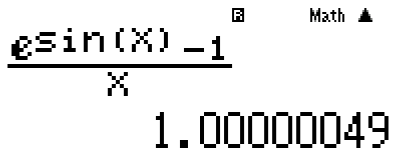
A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** $+\infty$

Hướng dẫn giải

❖ Cách 1 : CASIO

➢ Vì $x \to 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$ Sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC





➢ Ta nhận được kết quả $1.00000049 \approx 1$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Bài 3 : Tính giới hạn : $\lim \frac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$

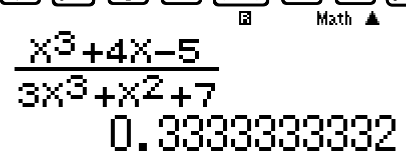
A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \to +\infty$

[▭/▭] [ALPHA] [)] [$x^{■}$] [3] [▶] [+] [4] [ALPHA] [)] [−] [5] [▼] [3] [ALPHA] [)] [$x^{■}$] [3] [▶] [+] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [7] [CALC] [1] [0] [$x^{■}$] [9] [)] [=]



➢ Ta nhận được kết quả $0.3333333332 \approx \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Bài 4 : Kết quả giới hạn $\lim \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ là :

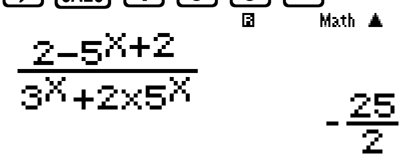
A. $-\frac{25}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** 1 **D.** $-\frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \to +\infty$. Tuy nhiên chúng ta chú ý, bài này liên quan đến lũy thừa (số mũ) mà máy tính chỉ tính được số mũ tối đa là 100 nên ta chọn $x = 100$

[▭/▭] [2] [−] [5] [$x^{■}$] [ALPHA] [)] [+] [2] [▼] [3] [$x^{■}$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [2] [×] [5] [$x^{■}$] [ALPHA] [)] [CALC] [1] [0] [0] [=]



➢ Ta nhận được kết quả $-\frac{25}{2}$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Chú ý : Nếu bạn nào không hiểu tính chất này của máy tính Casio mà cố tình cho $x = 10^9$ thì máy tính sẽ báo lỗi

[CALC] [1] [0] [$x^{■}$] [9] [)] [=]



Bài 5 : Tính giới hạn : $\lim\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Hướng dẫn giải

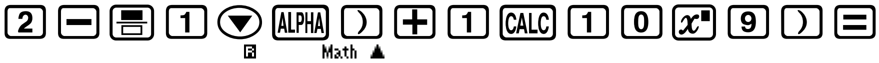
❖ Cách 1 : CASIO

➢ Ta không thể nhập vào máy tính Casio cả biểu thức n số hạng ở trong ngoặc được, vì vậy ta phải tiến hành rút gọn.

$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+...+\frac{n+1-n}{n(n+1)}$

$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}$

➢ Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x\to+\infty$





➢ Ta nhận được kết quả $1.999999999\approx2$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

Bài 6 : Cho $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-....+\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. Giá trị của S bằng :

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

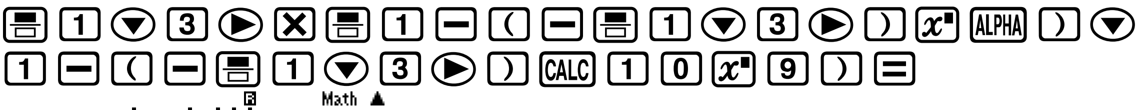
Hướng dẫn giải

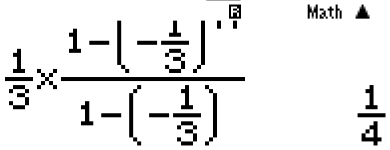
❖ Cách 1 : CASIO

➢ Ta hiểu giá trị của S bằng $\lim\limits_{n\to+\infty}S$

➢ Ta quan sát dãy số là một cấp số nhân với công bội $q=-\frac{1}{3}$ và $u_1=\frac{1}{3}$

Vậy $S=u_2\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{3}.\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$





➢ Ta nhận được kết quả $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Chú ý : Trong tự luận ta có thể sử dụng công thức của cấp số nhân lùi vô hạn để tính

Bài 7: Tính giới hạn : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}$

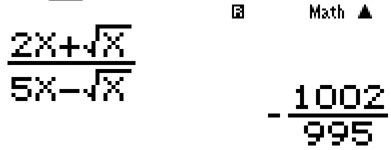
A. $+\infty$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $-\infty$ **D.** -1

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài cho $x \to 0^+ \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$





➢ Ta nhận được kết quả $-\frac{1002}{999} \approx -1$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 8 : Tính giới hạn : $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}$

A. $-\infty$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài cho $x \to 1^- \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$





❖ Ta nhận được kết quả chứa $10^{-4} \approx 0$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

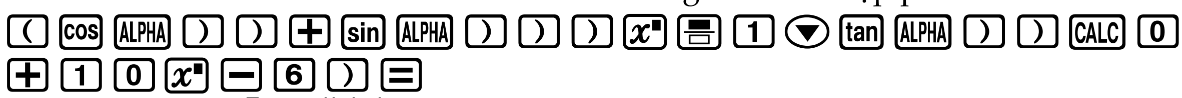
Bài 9 : Tính giới hạn : $L = \lim_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{\cot x}$

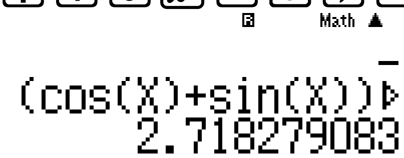
A. $L = \infty$ **B.** $L = 1$ **C.** $L = e$ **D.** $L = e^2$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài cho $x \to 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$. Phím cot không có ta sẽ nhập phím tan





❖ Ta nhận được kết quả chứa $2.718... \approx e$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 6. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Tiêm cận đứng : Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ (chỉ cần một trong hai thỏa mãn là đủ)

2. Tiệm cận ngang : Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang nếu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$

3. Tiệm cận xiên : Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên nếu $\lim\limits_{x \to \infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$

4. Lệnh Casio : Ứng dụng kỹ thuật dùng CALC tính giới hạn

2) VÍ DỤ MINH HỌA

<u>VD1</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Có bao nhiêu đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

GIẢI

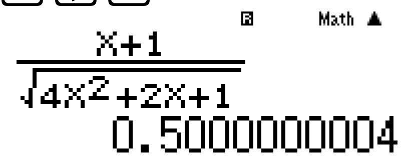
❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➢ Giải phương trình : Mẫu số $= 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 1 = 0$ vô nghiệm

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

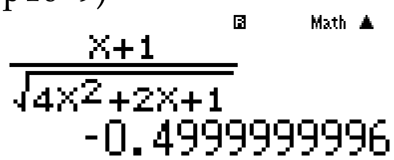
➢ Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = \dfrac{1}{2}$. Vậy đương thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

[▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [√▭] [4] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [9] [)] [=]



➢ Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} = -\dfrac{1}{2}$. Vậy đương thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

rp10^9)=



$\Rightarrow$ Tóm lại đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang và **C** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang
- Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

❖ **Bình luận :**

- Việc ứng dụng Casio để tìm tiệm cận sử dụng nhiều kỹ thuật tính giới hạn của hàm số bằng Casio. Các bạn cần học kỹ bài giới hạn trước khi học bài này.
- Giới hạn của hàm số khi x tiến tới $+\infty$ và khi x tiến tới $-\infty$ là khác nhau. Ta cần hết sức chú ý tránh để sót tiệm cận ngang $y=-\dfrac{1}{2}$

VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

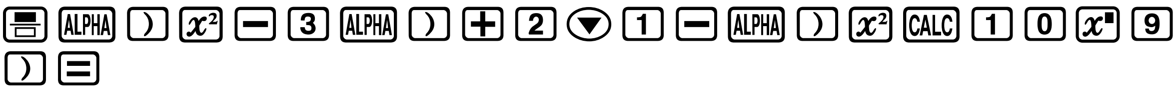
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}$ (C) có bao nhiêu đường tiệm cận ?

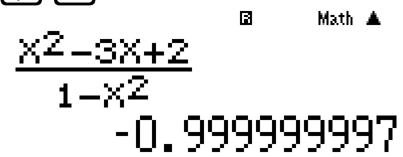
A. 4 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

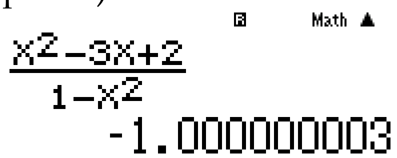
➢ Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}=-1$





Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}=-1$

rp10^9)=



Vậy đương thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

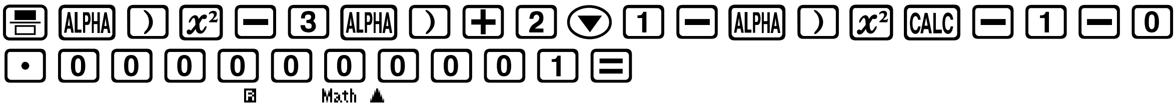
➢ Giải phương trình : Mẫu số $=0\;\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

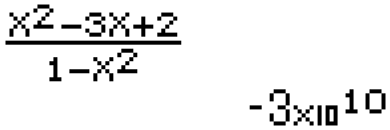
Đến đây nhiều học sinh đã ngộ nhận $x=1$ và $x=-1$ là 2 tiệm cận đứng của (C)

Tuy nhiên $x=\pm1$ là nghiệm của phương trình Mẫu số $=0$ chỉ là điều kiện cần. Điều kiện đủ phải là $\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\infty$

$\Rightarrow$ Ta đi kiểm tra điều kiện dủ

Tính $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = -\infty$





Vậy đương thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

Tính $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \dfrac{1}{2}$



Vậy đường thẳng $x = 1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

$\Rightarrow$ Tóm lại đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = -1$ và 1 tiệm cận đứng $x = -1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Rút gọn hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)(x+1)} = \dfrac{2 - x}{x + 1}$
- Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow$ đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang
- Tính $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2 - x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-1 + \dfrac{3}{x + 1}\right) = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận đứng

❖ **Bình luận :**

- Việc tử số và mẫu số đều có nhân tử chung dẫn tới hàm số bị suy biến như ví dụ 2 là thường xuyên xảy ra trong các đề thi. Chúng ta cần cảnh giá và kiểm tra lại bằng kỹ thuật tìm giới hạn bằng Casio

VD3-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

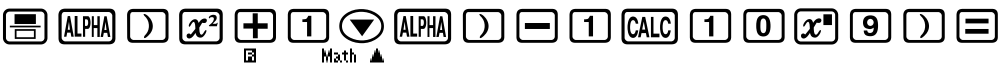
Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang ?

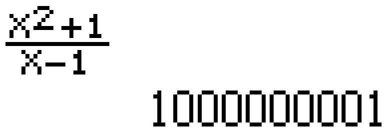
A. $y = \dfrac{x - 1}{x + 2}$ **B.** $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ **C.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ **D.** $y = \dfrac{1}{x + 1}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$





➢ Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$

rp10^9)=



Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ không có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Tóm lại **C** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=+\infty$

- Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=-\infty$ $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

❖ **Bình luận :**

- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang nếu $\lim\limits_{x\to\infty}y$ bằng ∞

VD4-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

Tìm tất các các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

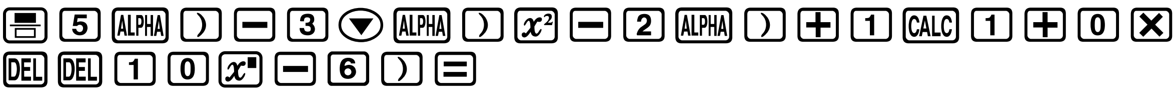
GIẢI

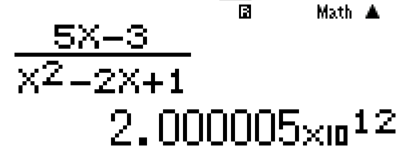
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phương trình mẫu số bằng 0 không có nghiệm hoặc có nghiệm nhưng giới hạn hàm số khi x tiến tới nghiệm không ra vô cùng.:

➢ Với $m=1$. Hàm số $\Leftrightarrow y=\dfrac{5x-3}{x^2-2x+1}$. Phương trình $x^2-2x+1=0$ có nghiệm $x=1$

Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x-3}{x^2-x+1}=+\infty$. $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai





➢ Với $m=0$ hàm số $\Leftrightarrow y=\dfrac{5x-3}{x^2+1}$. Phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng $\Rightarrow m=0$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phương trình mẫu số bằng 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow-1<m<1$

- Trường hợp 2 phương trình mẫu số bằng 0 có nghiệm nhưng bị suy biến (rút gọn) với nghiệm ở tử số. $\Rightarrow$ Không xảy ra vì bậc mẫu > bậc tử

❖ **Bình luận** :

- Việc giải thích được trường hợp 2 của tự luận là tương đối khó khăn. Do đó bài toán này chọn cách Casio là rất dễ làm.

VD5-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

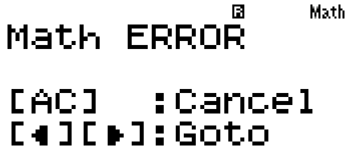
A. $m<0$ **B.** Không có m thỏa **C.** $m=0$ **D.** $m>0$

GIẢI

❖ **Cách 1** : **CASIO**

➢ Thử đáp án **A** ta chọn 1 giá trị $m<0$, ta chọn $m=-2,15$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{-2.15x^2+1}}$

$\frac{\square}{\square}$ ALPHA) + 1 ▼ √■ − 2 • 1 5 ALPHA) x^2 + 1 CALC 1 0 $x^\blacksquare$ 9) =



Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{-2.15x^2+1}}$ không tồn tại $\Rightarrow$ hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{-2.15x^2+1}}$ không thể có 2 tiệm cận ngang

➢ Thử đáp án **B** ta chọn gán giá trị $m=0$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{0x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)$

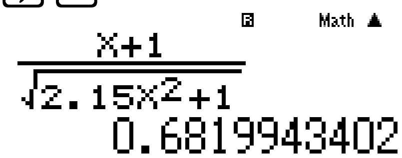
ALPHA) + 1 CALC 1 0 $x^\blacksquare$ 9) =



Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ $\Rightarrow$ hàm số $y=(x+1)$ không thể có 2 tiệm cận ngang

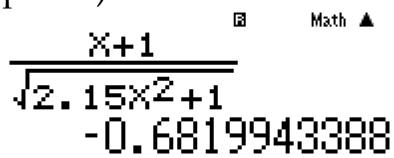
➢ Thử đáp án **D** ta chọn gán giá trị $m=2.15$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}}=0.6819...$

$\frac{\square}{\square}$ ALPHA) + 1 ▼ √■ 2 • 1 5 ALPHA) x^2 + 1 CALC 1 0 $x^\blacksquare$ 9) =



Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}}=-0.6819...$

rp10^9)=



Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang $y = \pm - 0.6819...$

$\Rightarrow$ Đáp số **D** là đáp số chính xác

❖ **Bình luận :**

▪ Qua ví dụ 4 ta thấy sức mạnh của Casio so với cách làm tự luận. .

VD6-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$

A. $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -2 \end{array}\right.$ **B.** $x = -3$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$ **D.** $x = 3$

GIẢI

➢ Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì điều kiện cần : x_0 là nghiệm của phương trình mẫu số bằng 0

Nên ta chỉ quan tâm đến hai đường thẳng $x = 3$ và $x = 2$

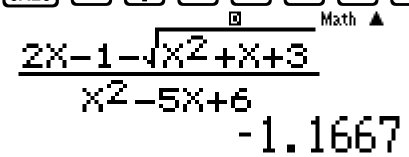
➢ Với $x = 3$ xét $\lim\limits_{x \to 3+} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = + \propto \Rightarrow x = 3$ là một tiệm cận đứng

[frac] 2 ALPHA) − 1 − [√] ALPHA) x^2 + ALPHA) + 3 ▼ ALPHA) x^2 − 5 ALPHA) + 6 CALC 3 + 0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 =



➢ Với $x = 2$ xét $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = + \propto$ Kết quả không ra vô cùng $\Rightarrow x = 2$ không là một tiệm cận đứng

CALC 2 + 0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ là :

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài 2-[Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 - 4}}$ là :

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Tìm các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng ?

A. $m = 0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$ **C.** $m > -1$ **D.** $m > 1$

Bài 4-[Thi thử THPT Quảng Xương –Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Hàm số $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài 5-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]

Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2 - m}$ có 3 đường tiệm cận

A. $m \neq 0$ **B.** $m = 0$ **C.** $m > 0$ **D.** $m < 0$

Bài 6-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + x + 1}$ có đường tiệm cận ngang

A. $m = -1$ **B.** $m < 0$ **C.** $m > 0$ **D.** $m = \pm 1$

Bài 7-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{m\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$ có đường thẳng $y = -2$ là một tiệm cận ngang.

A. $m \in \{-2; 2\}$ **B.** $m \in \{1; 2\}$ **C.** $m \in \{1; -2\}$ **D.** $m \in \{-1; 1\}$

Bài 8-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + mx + m}$ có đúng 1 tiệm cận.

A. $\left[\begin{array}{l} 0 \leq m \leq 4 \\ m = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$ **B.** $m \in \left\{0; 4; -\dfrac{4}{3}\right\}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{array}\right.$ **D.** Không có m thỏa

Bài 8-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - \sqrt{mx^2 + 1}}{x - 1}$ có đúng 2 tiệm cận ngang.

A. $m < 0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m > 3 \end{array}\right.$ **C.** $m > 0$ **D.** $m = 0$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Bài 10-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ (H), M là điểm bất kì và $M \in (H)$. Khi đó tích khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận của (H) bằng :

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 5

Bài 11-[Thi thử Sở GD-ĐT Hà Tĩnh năm 2017]

Cho hàm số $y = \dfrac{2mx + m}{x - 1}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8

A. $m=2$	**B.** $m=\pm\frac{1}{2}$	**C.** $m=\pm 4$	**D.** $m=\pm 2$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x^2-1}$ là :

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

GIẢI

- Phương trình mẫu số bằng 0 có 2 nghiệm $x=\pm 1$
- Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=+\propto \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng

[▭/▭] [ALPHA] [)] [▼] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [1] [CALC] [1] [+] [1] [0] [$x^■$] [−] [6] [)] [=]

$\frac{x}{x^2-1}$ Math ▲

500000.25

- Tính $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=+\propto \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng

[CALC] [−] [1] [+] [1] [0] [$x^■$] [−] [6] [)] [=]

$\frac{x}{x^2-1}$ Math ▲

499999.75

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 2-[Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}$ là :

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

GIẢI

- Phương trình mẫu số bằng 0 có 2 nghiệm $x=\pm 2$
- Tính $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}=+\propto \Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng

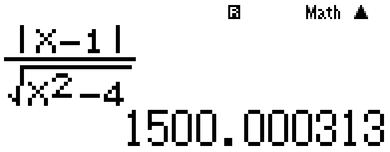
[ON] [▭/▭] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [−] [1] [▼] [√■] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [4] [CALC] [2] [+] [1] [0] [$x^■$] [−] [6] [)] [=]

$\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}$ Math ▲

500.0004375

- Tính $\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}=+\propto \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng

[CALC] [−] [2] [−] [1] [0] [$x^■$] [−] [6] [)] [=]



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

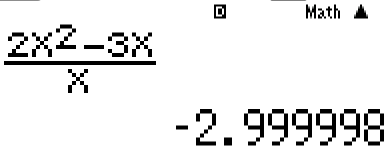
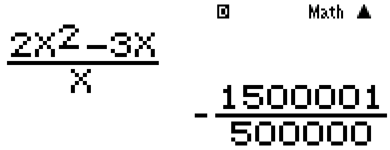
Tìm các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng ?

A. $m=0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ **C.** $m>-1$ **D.** $m>1$

GIẢI

- Với $m=0$ hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x}{x}$, Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2-3x}{x}=-3, \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2-3x}{x}=-3 \Rightarrow$ Không có tiệm cận đứng $\Rightarrow$ $m=0$ thỏa.

[▭/▭] [2] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [▼] [ALPHA] [)] [CALC] [0] [+] [1] [0] [x■] [−] [6] [)] [=]
[CALC] [0] [−] [1] [0] [x■] [−] [6] [)] [=]

- Tương tự $m=1$ cũng thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Chú ý: Nếu chúng ta chú ý một chút tự luận thì hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x}{x}$ sẽ rút gọn tử mẫu và thành $y=2x-3$ là đường thẳng nên không có tiệm cận đứng.

Bài 4-[Thi thử THPT Quảng Xương –Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

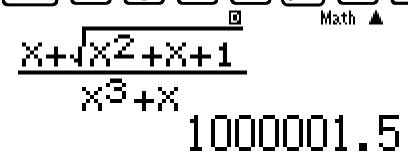
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

GIẢI

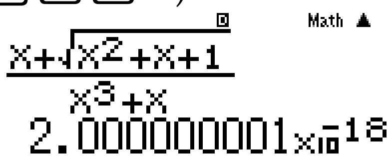
- Phương trình mẫu số bằng 0 có 1 nghiệm duy nhất $x=0$. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=+\infty$

$\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng

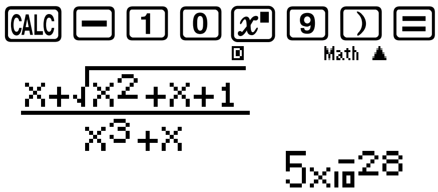
[▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [x■] [3] [▶] [+] [ALPHA] [)]
[CALC] [0] [+] [1] [0] [x■] [−] [6] [)] [=]



- Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=0 \Rightarrow y=0$ [tan] à ((■)) [log■□] ê [M+] [hyp] ậ [S⇔D] [S⇔D] [log] [▭/▭] [S⇔D] [log]
[CALC] [1] [0] ^9)=



- Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang



Tóm lại đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang $\Rightarrow$ **B** chính xác

<u>Chú ý</u>: Học sinh thường mặc định có 2 tiệm cận ngang $\Rightarrow$ Chọn nhầm đáp án **C**

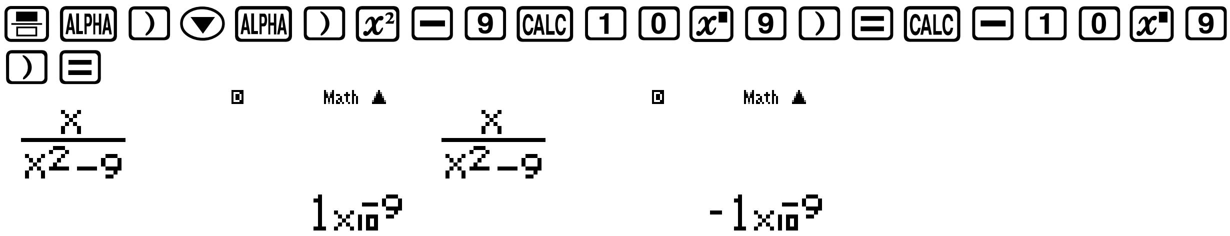
<u>Bài 5</u>-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]

Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-m}$ có 3 đường tiệm cận

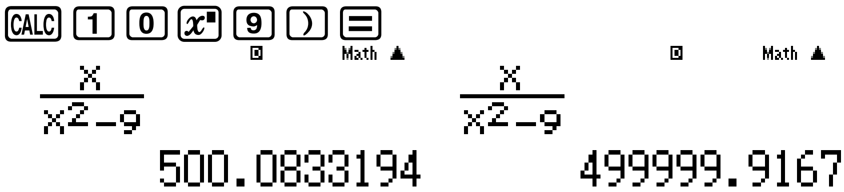
A. $m\neq 0$ **B.** $m=0$ **C.** $m>0$ **D.** $m<0$

GIẢI

- Thử với $m=9$ Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-9}=0\Rightarrow$Đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận ngang



- Phương trình mẫu số bằng 0 có hai nghiệm $x=3; x=-3$. Tính $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x}{x^2-9}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x}{x^2-9}=+\infty\Rightarrow$ có 2 tiệm cận đứng



Vậy $m=9$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chứa $m=9$ là **C** chính xác.

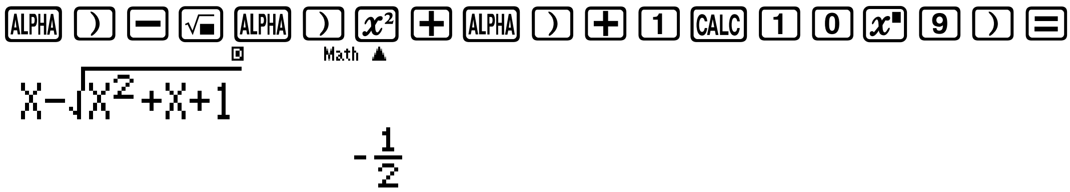
<u>Bài 6</u>-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+m\sqrt{x^2+x+1}$ có đường tiệm cận ngang

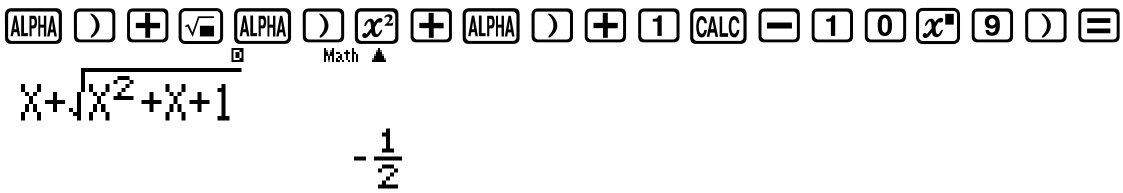
A. $m=-1$ **B.** $m<0$ **C.** $m>0$ **D.** $m=\pm1$

GIẢI

- Với $m=-1$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=-1$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số đúng là **A** hoặc **D**



- Với $m=1$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=1$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**



PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 7. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Phương pháp đồ thị tìm số nghiệm của phương trình : Cho phương trình $f(x)=g(x)$ (1), số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hàm số $y=g(x)$

Chú ý : Số nghiệm của phương trình $f(x=0)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành

2. Bài toán tìm nghiệm của phương trình chứa tham số : Ta tiến hành cô lập m và đưa phương trình ban đầu về dạng $f(x)=m$ (2) khi đó số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Chú ý : Đường thẳng $y=m$ có tính chất song song với trục hoành và đi qua điểm có tọa độ $(0;m)$

3. Lệnh Casio : Để tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao diểm ta dùng lệnh SHIFT SOLVE

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất các các giá trị của m để phương trình $\log_2 x-\log_2(x-2)=m$ có nghiệm :

A. $1\le m<+\infty$ **B.** $1<m<+\infty$ **C.** $0\le m<+\infty$ **D.** $0<m<+\infty$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đặt $\log_2 x-\log_2(x-2)=f(x)$ khi đó $m=f(x)$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì m thuộc miền giá trị của $f(x)$ hay $f(\min)\le m\le f(\max)$

➢ Tới đây bài toán tìm tham số m được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 2 End 10 Step 0.5

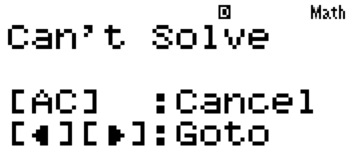
MODE 7 log□ 2 ▶ ALPHA) ▶ − log□ 2 ▶ ALPHA) − 2 = = 2 = 1 0 = 0 . 5 =



➢ Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy $f(10)\approx 0.3219$ vậy đáp số **A** và **B** sai. Đồng thời khi x càng tăng vậy thì $F(X)$ càng giảm. Vậy câu hỏi đặt ra là $F(X)$ có giảm được về 0 hay không.

Ta tư duy nếu $F(X)$ giảm được về 0 có nghĩa là phương trình $f(x)=0$ có nghiệm. Để kiểm tra dự đoán này ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

log□ 2 ▶ ALPHA) ▶ − log□ 2 ▶ ALPHA) − 2 SHIFT CALC 3 =



Máy tính Casio báo phương trình này không có nghiệm. Vậy dấu = không xảy ra

➢ Tóm lại $f(x)>0 \Leftrightarrow m>0$ và **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Điều kiện : $x>2$
- Phương trình $\Leftrightarrow m=\log_2\left(\frac{x}{x-2}\right) \Leftrightarrow m=\log_2\left(1+\frac{2}{x-2}\right)$
- Vì $x>2$ nên $x-2>0 \Rightarrow 1+\frac{2}{x-2}>1 \Rightarrow \log_2\left(1+\frac{2}{x-2}\right)>\log_2 1=0$

  Vậy $m=\log\left(1+\frac{2}{x-2}\right)>0$

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo
- Chú ý : $m=f(x)$ mà $f(x)>0$ vậy $m>0$ một tính chất bắc cầu hay và thường xuyên gặp

VD2-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt

A. $-4<m<0$ **B.** $-4\le m\le 0$ **C.** $0\le m\le 4$ **D.** $0<m<1$

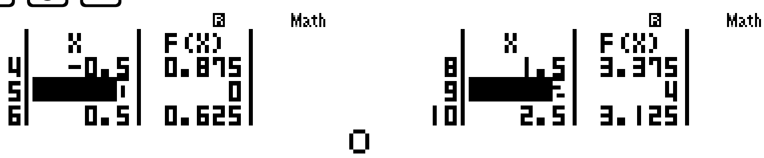
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

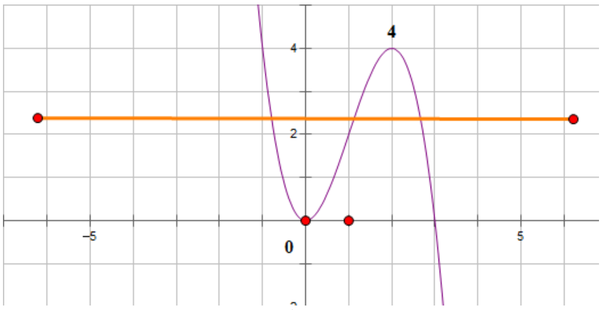
➢ Cô lập m , đưa phương trình ban đầu về dạng $m=-x^3+3x^2$. Đặt $x^3-3x^2=f(x)$ khi đó $m=f(x)$ (1) , số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và $y=m$

➢ Để khảo sát hàm số $y=f(x)$ ta sử dụng chức năng MODE 7 Start -2 End 5 Step 0.5

MODE 7 − ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + 3 ALPHA) x^2 = = − 2 = 5 = 0 . 5 =



Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị cực tiểu là 0 và giá trị cực đại là 4 vậy ta có sơ đồ đường đi của $f(x)$ như sau :



➢ Rõ ràng hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nếu $0<m<4$

VD3-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

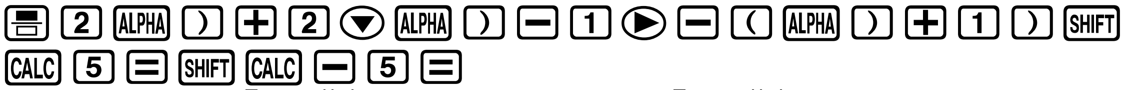
Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $(d): y=x+1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt M, N thì tung độ điểm I của đoạn thẳng MN bằng :

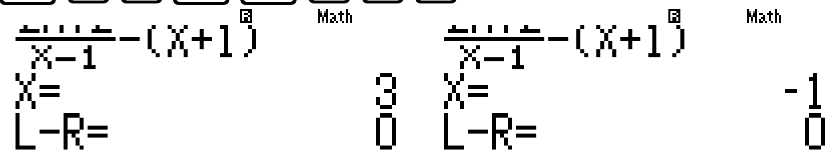
A. -3 **B.** -2 **C.** 1 **D.** 2

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+2}{x-1}=x+1$. Nhập phương trình này vào máy tính Casio và dò nghiệm :





Ta có ngay 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1=3 \Rightarrow y_1=x_1+1=4 \\ x_2=-1 \Rightarrow y_2=x_2+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow y_I=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD4-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3+mx+16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

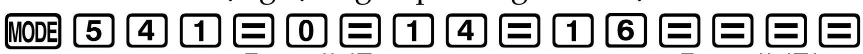
A. $m>12$ **B.** $m<-12$ **C.** $m<0$ **D.** Không có m thỏa

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Để đồ thị hàm số $y=x^3+mx+16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^3+mx+16=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

➢ Với $m=14$ sử dụng lệnh giải phương trình bậc 3 MODE 5





Ta thấy nghiệm $x_2; x_3$ là nghiệm ảo $\Rightarrow$ không đủ 3 nghiệm thực $\Rightarrow m=14$ không thỏa $\Rightarrow$ **A** sai

➢ Với $m=-14$ sử dụng lệnh giải phương trình bậc 3 MODE 5





Ta thấy ra 3 nghiệm thực $\Rightarrow$ Đáp án đúng có thể là **B** hoặc **C**

Thử thêm một giá trị $m=-1$ nữa thì thấy $m=-1$ không thỏa

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

<u>VD5</u>-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

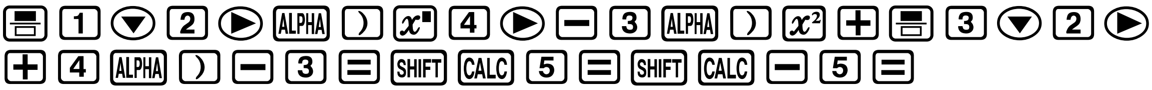
Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Biết đường thẳng $y=-4x+3$ tiếp xúc với (C) tại điểm A và cắt (C) tại điểm B. Tìm tung độ của điểm B

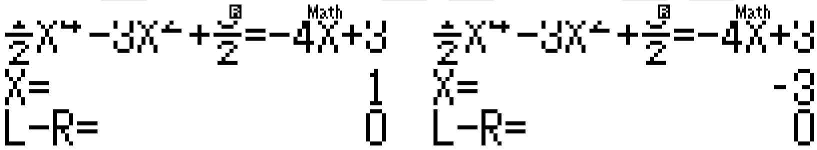
A. 1 **B.** 15 **C.** -3 **D.** -1

GIẢI

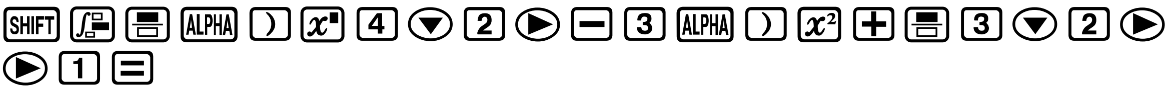
❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

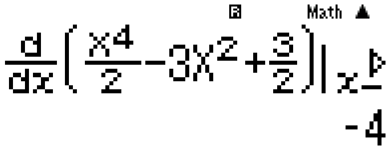
➢ Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}=-4x+3$. Sử dụng SHIFT SOLVE để dò 2 nghiệm phương trình trên





➢ Nếu A là tiếp điểm thì $y'(x_A)=0$, B là giao điểm $\Rightarrow y'(x_B)\neq 0$.





$\Rightarrow x_B=1 \Rightarrow y_B=-4x_B+3=-1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

<u>VD6</u>-[Thi HK1 THPT HN-Amsterdam năm 2017]

Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-4$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị (C) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm có hoành độ lớn hơn -1 ?

A. $-3<m<-1$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $2<m<3$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right.$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : T. CASIO**

- Số nghiệm của đồ thị (C) và trục hoành là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm. $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4 = 0$ (1) . Đặt $x^2 = t$ thì $(1) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0$ (2)
- Ta hiểu 1 nghiệm $t > 0$ sẽ sinh ra 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{t}$. Khi phương trình (2) có 2 nghiệm $t_1 > t_2 > 0$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1} < -\sqrt{t_2} < \sqrt{t_2} < \sqrt{t_1}$. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 3 điểm có hoành độ lớn hơn -1 (tức là 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn -1) thì $0 < t_2 \le 1 < t_1$ (*)

  Thử với $m = -2.5$ Xét phương trình $t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0$

  MODE 5 3 1 = − 5 = 2 · 5 x^2 − 4 = = =

  X1= $\frac{9}{2}$ X2= $\frac{1}{2}$

  Thỏa mãn (*) $\Rightarrow m = 2.5$ thỏa $\Rightarrow$ **C** là đáp số chính xác

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 + 3x^2 - 12x = m$ có đúng 1 nghiệm dương

A. $\left[\begin{array}{l} m < -7 \\ m > 0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -7 \\ m > 0 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -7 \\ m > 20 \end{array}\right.$ **D.** Không có m thỏa

Bài 3-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]
Tìm tất cả giá trị m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{2}$

A. $0 < m < 2$ **B.** $-2 < m < 2$ **C.** $\frac{9}{8} < m < 2$ **D.** $-2 \le m \le 2$

Bài 3-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m = 3$ **B.** $m > 2$ **C.** $2 \le m \le 3$ **D.** $2 < m < 3$

Bài 4-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]
Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$ có nghiệm ?

A. 20 **B.** 35 **C.** 30 **D.** 25

Bài 5-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]
Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x - 2.81^x = m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

A. $m > 0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{2} \\ m \ge \sqrt{2} \end{array}\right.$ **C.** Với mọi m **D.** Không tồn tại m

Bài 6-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]
Phương trình $\log_3 x - \log_3(x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. $m>1$	B. $m<0$	C. $0<m\le 1$	D. $m\le 1$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

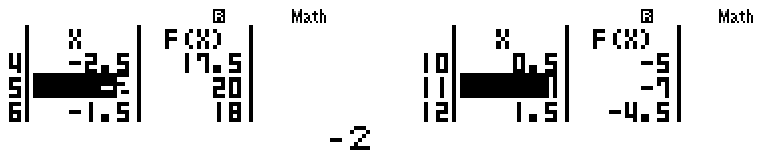
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3+3x^2-12x=m$ có đúng 1 nghiệm dương

A. $\left[\begin{array}{l} m<-7 \\ m>0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-7 \\ m>0 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-7 \\ m>20 \end{array}\right.$ **D.** Không có m thỏa

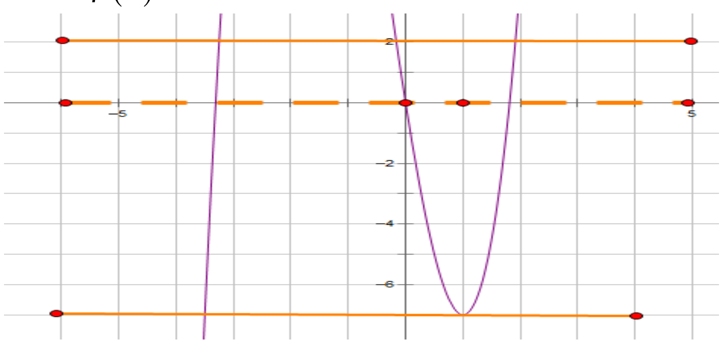
GIẢI

- Đặt $f(x)=4^{x^2}-2^{x^2+2}+6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$ (1). Để (1) có đúng 1 nghiệm dương thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ dương.
- Khảo sát hàm số $y=f(x)$ với chức năng MODE 7

MODE 7 2 ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ + 3 ALPHA) x^2 − 1 2 ALPHA) = = − 4 = 5 = 0 . 5 =



- Ta thấy đồ thị có giá trị cực đại là 20 và giá trị cực tiểu là -7 và ta sẽ mô tả được đường đi của $f(x)$ như sau :



Rõ ràng $\left[\begin{array}{l} y=m>0 \\ y=-7 \end{array}\right.$ thì hai đồ thị cắt nhau tại đúng 1 điểm có hoành độ dương. $\Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác

Bài 3-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả giá trị m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\dfrac{1}{2}$

A. $0<m<2$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $\dfrac{9}{8}<m<2$ **D.** $-2\le m\le 2$

GIẢI

- Số giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số trên là số giao điểm của phương trình $x^3-3x^2+2=m \Leftrightarrow x^3-3x^2+2-m=0$
- Thử với $m=-2$. Giải phương trinh bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = − 3 = 0 = 2 − (− 2) = = =

X1= -1   X2= 2

Ta thấy chỉ có 2 nghiệm $\Rightarrow$ 2 giao điểm $\Rightarrow$ $m=-2$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án **D** sai

- Thử với $m=-1$. Giải phương trình bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = − 3 = 0 = 3 = = =

X1= -0.8793852416

Ta thấy có nghiệm $<-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $m=-1$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án **B** sai

- Thử với $m=1$. Giải phương trình bậc 3 với tính năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = − 3 = 0 = 3 = = =

X3= -0.5320888862

Ta thấy có nghiệm $<-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $m=1$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

$\Rightarrow$ Đáp án **C** còn lại là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

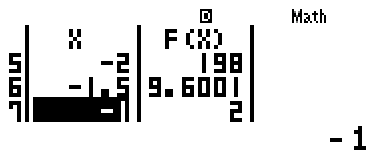
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m=3$ **B.** $m>2$ **C.** $2\le m\le 3$ **D.** $2<m<3$

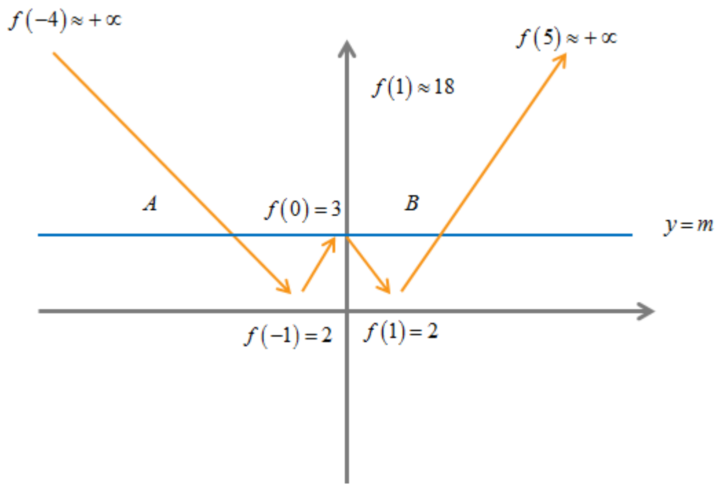
GIẢI

- Đặt $f(x)=4^{x^2}-2^{x^2+2}+6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -4 End 5 Step 0.5

MODE 7 4 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) x^2 ▶ − 2 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) x^2 + 2 ▶ + 6 = = − 4 = 5 = 0 . 5 =



- Quan sát bảng biến thiên ta vẽ đường đi của hàm số



Rõ ràng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt vậy đáp án A là chính xác

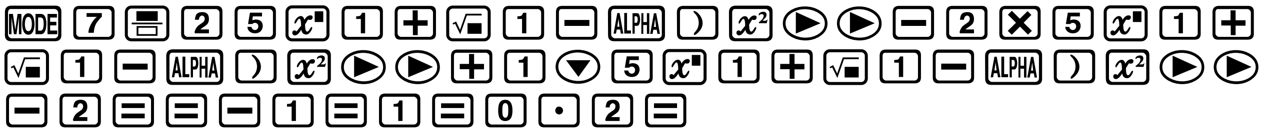
Bài 4-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

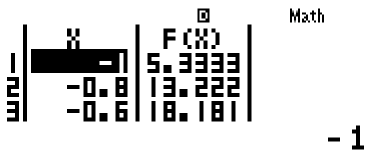
Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm ?

A. 20 **B.** 35 **C.** 30 **D.** 25

GIẢI

- Cô lập m ta được $m=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$
- Đặt $f(x)=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -1 End 1 Step 2





- Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)\le f(0)=25.043...$ hay $m\le f(0)$ vậy m nguyên dương lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ D là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x-2.81^x=m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

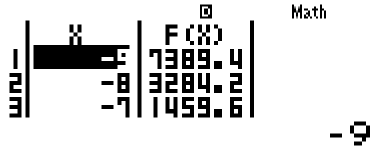
A. $m>0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\sqrt{2} \\ m\ge \sqrt{2}\end{array}\right.$ **C.** Với mọi m **D.** Không tồn tại m

GIẢI

- Cô lập m ta được $m=\dfrac{5.16^x-2.81^x}{36^x}$
- Đặt $f(x)=\dfrac{5.16^x-2.81^x}{36^x}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$

- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -9 End 10 Step 1

MODE 7 □/□ 5 × 1 6 x■ ALPHA) ▶ − 2 × 8 1 x■ ALPHA) ▼ 3 6 x■ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ luôn giảm hay hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến.

Điều này có nghĩa là đường thẳng $y=m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm $\Rightarrow$ **C** chính xác

<u>Bài 6</u>-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x-\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. $m>1$ **B.** $m<0$ **C.** $0<m\le 1$ **D.** $m\le 1$

GIẢI

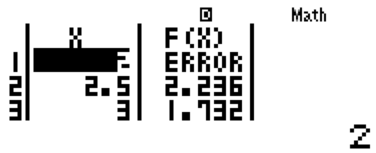
- Điều kiện : $x>2$. Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{x-2}\right)=2\log_3 m \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{x}{x-2}\right)=\log_3 m$

$\Leftrightarrow \log_3\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\log_3 m \Leftrightarrow m=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

Để phương trình ban đầu vô nghiệm thì đường thẳng $y=m$ không cắt đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

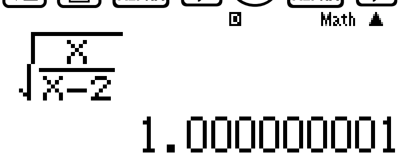
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start 2 End 10 Step 0.5

MODE 7 √■ □/□ ALPHA) ▼ ALPHA) − 2 = = 2 = 1 0 = 0 • 5 =



- Để khảo sát chính xác hơn ta tính giới hạn của hàm $f(x)$ khi x tiến tới 2 cận là 2 và $+\infty$

√■ □/□ ALPHA) ▼ ALPHA) − 2 CALC 1 0 x■ 9) =



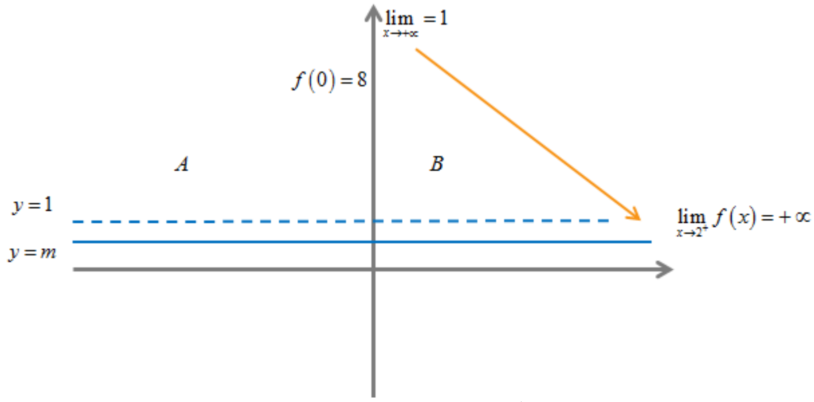
Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}=1$

saQ)RQ)p2r2+0.0000001=



Vậy $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

- Quan sát bảng giá trị và 2 giới hạn ta vẽ đường đi cả đồ thị hàm số $y = f(x)$ và sự tương giao



Ta thấy ngay $m \le 1$ thì 2 đồ thị không cắt nhau hay phương trình ban đầu vô nghiệm

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 8. ĐẠO HÀM.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Lệnh tính đạo hàm cấp 1 : qy

2. Công thức tính đạo hàm cấp 2 : $y''(x_0)=\dfrac{y'(x_0+0.000001)-y'(x_0)}{0.000001}$

3. Dự đoán công thức đạo hàm bậc n :

- Bước 1 : Tính đạo hàm cấp 1, đạo hàm cấp 2, đạo hàm cấp 3
- Bước 2 : Tìm quy luật về dấu, về hệ số, về số biến, về số mũ rồi rút ra công thức tổng quát.

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

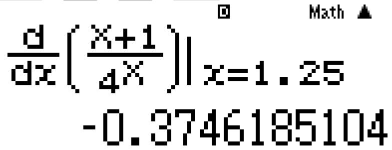
C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

GIẢI

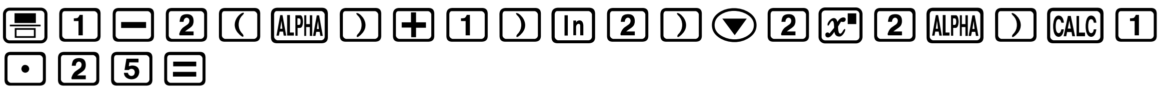
❖ **Cách 1 : CASIO**

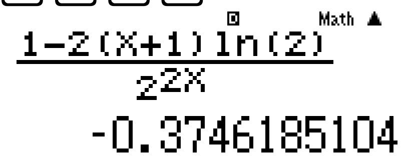
➢ Chọn $x=1.25$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$ Ta có : $y'(1.25)=-0.3746...$. Sử dụng lệnh tính tích phân ta có :





➢ Nếu đáp án **A** đúng thì $y'(1.25)$ cũng phải giống y' ở trên . Sử dụng lệnh tính giá trị CALC ta có





Ta thấy giống hệt nhau $\Rightarrow$ Rõ ràng đáp án đúng là **A**

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y=e^x(3-x^2)$. Đạo hàm của hàm số triệt tiêu tại các điểm :

A. $x=1;x=-3$ **B.** $x=1;x=3$ **C.** $x=-1;x=3$ **D.** $x=0$

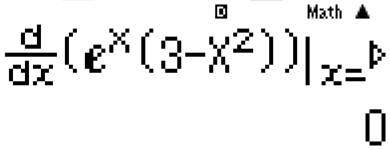
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta hiểu : Đạo hàm bị triệt tiêu tại điểm $x = x_0$ tức là $f'(x_0) = 0$

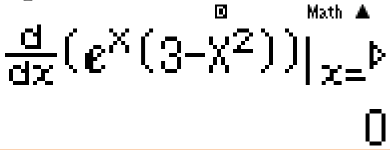
  Xét $f'(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số đúng là **A** hoặc **B**





- Xét $f'(-3) = 0 \Rightarrow x = -3$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

  !!op3=



<u>Bài 3</u>-[Thi HK1 THPT Kim Liên – Hà Nội năm 2017]

Cho hàm số $y = 2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $y' + 2y\ln 2 = 0$ **B.** $y' + 3y\ln 2 = 0$ **C.** $y' - 8y\ln 2 = 0$ **D.** $y' + 8y\ln 2 = 0$

GIẢI

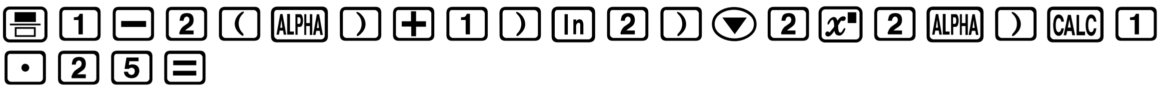
❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

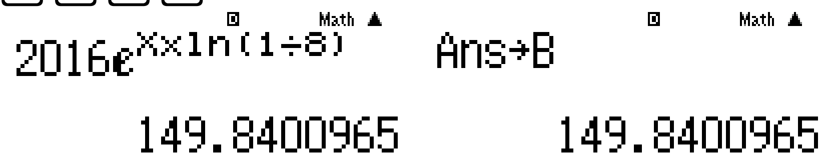
- Chọn $x = 1.25$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y = 2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Ta có : $y'(1.25) = -0.3746....$ Lưu giá trị này vào biến A cho gọn.





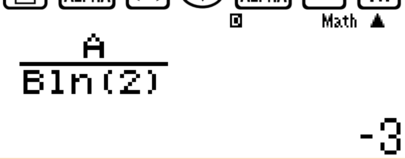
- Tính giá trị của y tại $x = 1.25$. Ta có $y(1.25) =$ Nếu đáp án **A** đúng thì $y'(1.25)$ cũng phải giống y' ở trên . Sử dụng lệnh tính giá trị CALC ta có





Ta thấy $\frac{A}{B\ln 2} = -3 \Rightarrow A + 3B\ln 2 = 0 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**





<u>Bài 4</u>-[Thi thử THPT Quảng Xương –Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau $y = (1-2x)^4$ tại điểm $x = 2$ là /

A. 81 **B.** 432 **C.** 108 **D.** -216

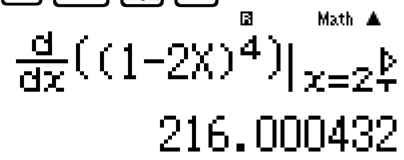
GIẢI

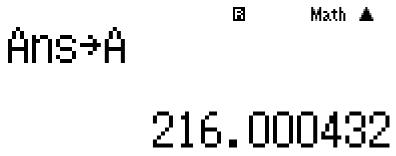
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Áp dụng công thức $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x_0}$

Chọn $\Delta x=0.000001$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y=(1-2x)^4$. Tính $y'(2+0,000001)=A$.

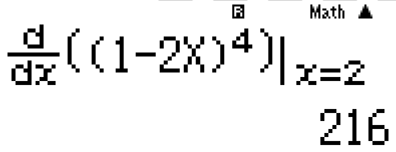
SHIFT ∫▭ ALPHA x10ˣ x▪ ALPHA) ▶ sin ALPHA)) ▶ 0 + 0 • 0 0 1
= SHIFT RCL (−)





➢ Tính $f'(2)=B$.

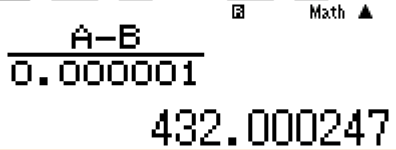
▲ ◀ ◀ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL = SHIFT RCL °'''





Lắp vào công thức $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x_0}=432\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

▭ ALPHA (−) − ALPHA °''' ▼ 0 • 0 0 0 0 0 1 =



<u>Bài 5</u>-[Thi Học sinh giỏi tính Phú Thọ năm 2017]

Cho hàm số $f(x)=e^x.\sin x$. Tính $f''(0)$

A. $-2e$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $2e$

GIẢI

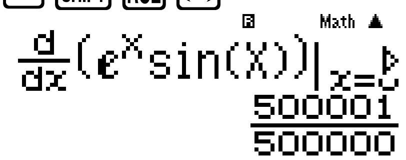
❖ **Cách 1 : CASIO**

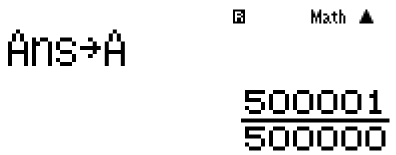
➢ Áp dụng công thức $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x_0}$

Chọn $\Delta x=0.000001$ rồi tính đạo hàm của hàm số $f(x)=e^x.\sin x$. Tính $y'(0+0,001)=A$.

(Chú ý bài toán có yếu tố lượng giác phải chuyển máy tính về chế độ Rađian)

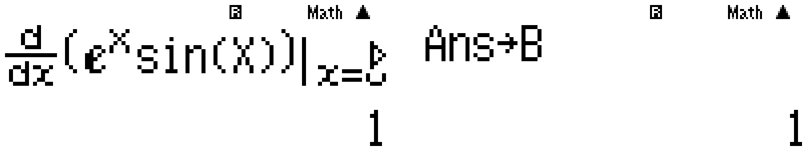
SHIFT ∫▭ ALPHA x10ˣ x▪ ALPHA) ▶ sin ALPHA)) ▶ 0 + 0 • 0 0 1
= SHIFT RCL (−)





➢ Tính $f'(0)=B$.

SHIFT ∫▭ ALPHA x10ˣ x▪ ALPHA) ▶ sin ALPHA)) ▶ 0 + 0 = SHIFT RCL °'''



Lắp vào công thức $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x_0}=2\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

[▤] [ALPHA] [(–)] [–] [ALPHA] [°'"] [▼] [0] [•] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]



Bài 6-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Cho hàm số $y=e^{-x}\sin x$, đặt $F=y''+2y'$ khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $F=-2y$ **B.** $F=y$ **C.** $F=-y$ **D.** $F=2y$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Áp dụng công thức $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x_0}$

Chọn $x=2$, $\Delta x=0.000001$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y=e^{-x}\sin x$. Tính $y'(2+0,001)=A$.

[SHIFT] [MODE] [4] [SHIFT] [∫□] [ALPHA] [x10ˣ] [x■] [–] [ALPHA] [)] [▶] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▶] [2] [+] [0] [•] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=] [SHIFT] [RCL] [(–)]



➢ Tính $f'(0)=B$.

[▲] [◀] [◀] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [=] [SHIFT] [RCL] [°'"]



Lắp vào công thức $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x_0}=C$

[▤] [ALPHA] [(–)] [–] [ALPHA] [°'"] [▼] [0] [•] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]



➢ Tính $F=y''+2y'=C+2B=-0.2461...=-2y$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 7 : Một vật chuyển động theo quy luật $S=-\dfrac{1}{2}t^3+9t^2$ với thời gian $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. $216(m/s)$ **B.** $30(m/s)$ **C.** $400(m/s)$ **D.** $54(m/s)$

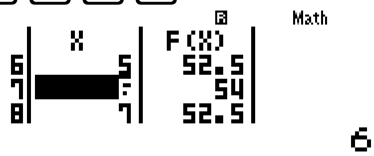
GIẢI

❖ **Cách 1** : **CASIO**

➢ Ta hiểu : trong chuyển động biến đổi theo thời gian thì quãng đường là nguyên hàm của vận tốc hay nói cách khác, vận tốc là đạo hàm của quãng đường $\Rightarrow v(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$

➢ Để tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trong khoảng thời gian từ 0 đến $10(s)$ ta sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 0 End 10 Step 1

MODE 7 − ▭/▭ 3 ▼ 2 ▶ ALPHA) x^2 + 1 8 ALPHA) = = 0 = 1 0 = 1 =



Ta thấy ngay vận tốc lớn nhất là $54(m/s)$ đạt được tại giay thứ 6

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 8 : Một vật rơi tự do theo phương trình $S = \frac{1}{2}gt^2$ với $g = 9.8(m/s^2)$. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5s$ là :

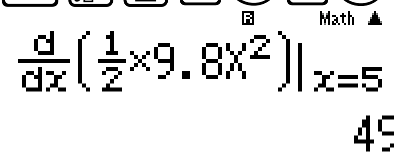
A. $122.5(m/s)$ **B.** 29.5 **C.** $10(m/s)$ **D.** $49(m/s)$

GIẢI

❖ **Cách 1** : **CASIO**

➢ Ta hiểu : Vận tốc tức thời trong chuyển động biến đổi tại thời điểm $t = t_1$ có giá trị là $S(t_1)$

SHIFT ∫▭ ▭/▭ 1 ▼ 2 ▶ × 9 • 8 ALPHA) x^2 ▶ 5 =



Ta thấy vận tốc tại $t_1 = 5$ là $49 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$

A. $y' = x.13^{x-1}$ **B.** $y' = 13^x.\ln 13$ **C.** $y' = 13^x$ **D.** $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Đạo hàm của hàm số $y = 2^x.3^x$ bằng :

A. $6^x \ln 6$ **B.** 6^x **C.** $2^x + 3^x$ **D.** $2^{x-1} + 3^{x-1}$

Bài 3-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $f(x) = \ln|\cos 3x|$ giá trị $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ bằng :

A. -3 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Bài 4 : Cho hàm số $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$. Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$ là :

A. $(0;+\infty)$ **B.** $[-2;2]$ **C.** $(-\infty;+\infty)$ **D.**Không có m thỏa

Bài 5 : Cho hàm số $f(x)=x.e^{x^2}$. Khi đó $f''(1)$ bằng :

A. $10e$ **B.** $6e$ **C.** $4e^2$ **D.**10

Bài 6 : Tính vi phân của hàm số $y=\sin x$ tại điểm $x_0=\frac{\pi}{3}$

A. $dy=\frac{\sqrt{3}}{2}dx$ **B.** $dy=\frac{1}{2}dx$ **C.** $dy=\cos xdx$ **D.** $dy=-coxdx$

Bài 7 : Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2-x+3$ có điểm uốn $I(-2;1)$ khi :

A. $a=-\frac{1}{4};b=-\frac{3}{2}$ **B.** $a=-\frac{3}{2};b=-1$ **C.** $a=\frac{1}{4};b=\frac{3}{2}$ **D.** $a=\frac{1}{4};b=-\frac{3}{2}$

Bài 8 : Cho hàm số $y=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$. Khi đó ta có :

A. $y''=y$ **B.** $y''=-y$ **C.** $y''=2y$ **D.** $y''=-2y$

LỜI GIẢI BÀI TẬP T Ự LUYỆN

Bài 1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

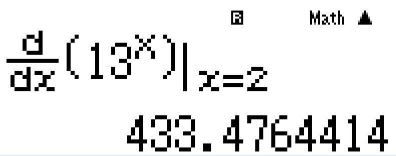
Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$

A. $y'=x.13^{x-1}$ **B.** $y'=13^x.\ln 13$ **C.** $y'=13^x$ **D.** $y'=\frac{13^x}{\ln 13}$

GIẢI

- Chọn $x=2$. Tính $y'(2)=433.4764...=13^2.\ln 13\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

SHIFT ∫ 1 3 x■ ALPHA) ▶ ▶ 2 =



Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Đạo hàm của hàm số $y=2^x.3^x$ bằng :

A. $6^x\ln 6$ **B.** 6^x **C.** 2^x+3^x **D.** $2^{x-1}+3^{x-1}$

GIẢI

- Chọn $x=3$ tính $y'(3)=387.0200...=6^3\ln 6\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

SHIFT ∫ 2 x■ ALPHA) ▶ × 3 x■ ALPHA) ▶ ▶ 3 =



Bài 3-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $f(x)=\ln|\cos 3x|$ giá trị $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ bằng :

A. -3 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

GIẢI

- Tính $\left(\ln|\cos 3x|\right)' = \dfrac{1}{|\cos 3x|}\left(|\cos 3x|\right)'$
- Tính $\left(|\cos 3x|\right)' = \left(\sqrt{\cos^2 3x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos^2 3x}}\left(\cos^2 3x\right)' = \dfrac{-3\cos 3x \sin 3x}{|\cos 3x|}$

$\Rightarrow \left(\ln|\cos 3x|\right)' = \dfrac{-3\sin 3x\cos 3x}{|\cos 3x|^2}$

$\Rightarrow y'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

SHIFT MODE 4 [phân số] − 3 sin 3 ALPHA)) cos 3 ALPHA)) ▼ SHIFT hyp cos 3 ALPHA)) ▶ x^2 CALC SHIFT ×10ˣ ÷ 1 2 =

$\dfrac{-3\sin(3X)\cos(3X}{|\cos(3X)|^2}$

-3

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 4 : Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$. Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 0$ là :

A. $(0;+\infty)$ **B.** $[-2;2]$ **C.** $(-\infty;+\infty)$ **D.** Không có m thỏa

GIẢI

- Tính $y' = x^2 + x + 1$. $y' \le 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \le 0$
- Nhẩm được luôn hoặc sử dụng tính năng giải bất phương trình MODE INEQ

MODE ▼ 1 1 4 1 = 1 = 1 = =

No-Solution

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 5 : Cho hàm số $f(x) = x.e^{x^2}$. Khi đó $f''(1)$ bằng :

A. $10e$ **B.** $6e$ **C.** $4e^2$ **D.** 10

GIẢI

- Tính $f'(1+0.000001)$ rồi lưu vào A

SHIFT ∫ ALPHA) × ALPHA ×10ˣ $x^{■}$ ALPHA) x^2 ▶ ▶ 1 + 0 . 0 0 0 0 0 1 = SHIFT RCL (−)

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(X\times e^{X^2}\right)\right|_{x=1+0}$ Ans→A

8.154872668 8.154872668

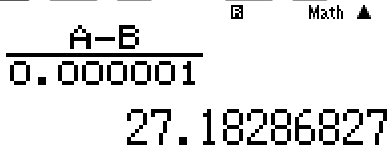
- Tính $f'(1)$ rồi lưu vào B

▲ ◀ ◀ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL = SHIFT RCL °'''



- Thiết lập $y''=\dfrac{f'(1+0.000001)-f'(1)}{0.000001}=27.1828...=10e$

▭/▭ ALPHA (−) − ALPHA °'" ▼ 0 . 0 0 0 0 0 1 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

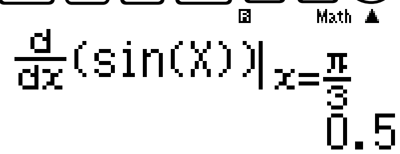
<u>Bài 6</u> : Tính vi phân của hàm số $y=\sin x$ tại điểm $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

A. $dy=\dfrac{\sqrt{3}}{2}dx$ **B.** $dy=\dfrac{1}{2}dx$ **C.** $dy=\cos xdx$ **D.** $dy=-coxdx$

GIẢI

- Từ $y=\sin x$ tiến hành vi phân 2 vế : $(y')dy=(\sin x)'dx \Leftrightarrow dy=(\sin x)'dx$
- Tính $(\sin x)'$ tại $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

SHIFT ∫ sin ALPHA)) ▶ ▭/▭ SHIFT ×10ˣ ▼ 3 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

<u>Bài 7</u> : Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2-x+3$ có điểm uốn $I(-2;1)$ khi :

A. $a=-\dfrac{1}{4};b=-\dfrac{3}{2}$ **B.** $a=-\dfrac{3}{2};b=-1$ **C.** $a=\dfrac{1}{4};b=\dfrac{3}{2}$ **D.** $a=\dfrac{1}{4};b=-\dfrac{3}{2}$

GIẢI

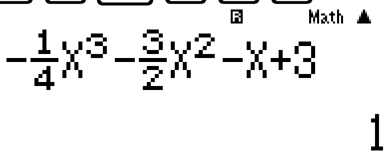
- Hoành độ điểm uốn là nghiệm của phương trình $y''=0$

  Tính $y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow y''=6ax+2b$.

  $y'=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2b}{6a}=-2 \Leftrightarrow b=6a \Rightarrow$ Đáp số đúng là A hoặc C

- Với $a=-\dfrac{1}{4};b=-\dfrac{3}{2}$ tính tung độ của điểm uốn : $y(2)=1$

− ▭/▭ 1 ▼ 4 ▶ ALPHA) x■ 3 ▶ − ▭/▭ 3 ▼ 2 ▶ ALPHA) x² − ALPHA) + 3 CALC − 2 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

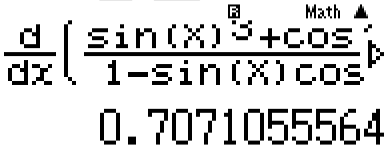
<u>Bài 8</u> : Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$. Khi đó ta có :

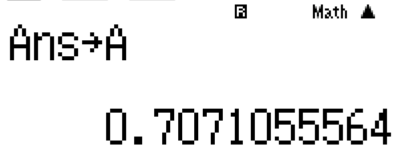
A. $y''=y$ **B.** $y''=-y$ **C.** $y''=2y$ **D.** $y''=-2y$

GIẢI

- Chọn $x=\frac{\pi}{12}$ Tính $y'\left(\frac{\pi}{12}+0.000001\right)$ rồi lưu và A

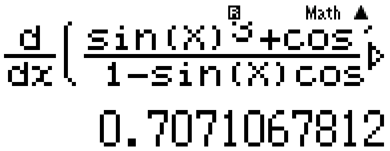
SHIFT ∫□ ▭ sin ALPHA)) $x^{■}$ 3 ► + cos ALPHA)) $x^{■}$ 3 ▼ 1 − sin ALPHA)) cos ALPHA)) ► ► ▭ SHIFT $\times10^x$ ▼ 1 2 =

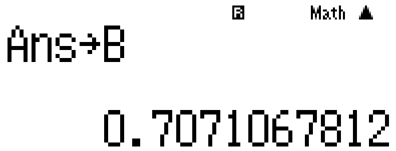




Tính $y'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ rồi lưu và B

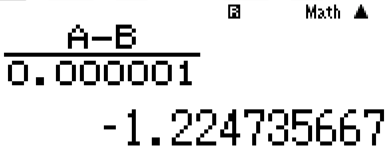
▲ ◄ ◄ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL = SHIFT RCL °'''





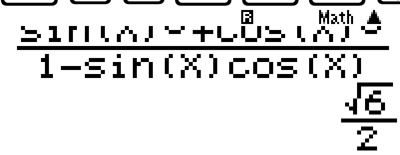
Tính $y''\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{A-B}{0.000001}=-1.2247...=-y$

▭ ALPHA (−) − ALPHA °''' ▼ 0 . 0 0 0 0 0 1 =



- Tính $y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

▭ sin ALPHA)) $x^{■}$ 3 ► + cos ALPHA)) $x^{■}$ 3 ▼ 1 − sin ALPHA)) cos ALPHA)) CALC SHIFT $\times10^x$ ÷ 1 2 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 9. TÌM SỐ NGHIÊM PHƯƠNG TRÌNH – LOGARIT (P1).

1) PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Chuyển PT về dạng Vế trái = 0 . Vậy nghiệm của PT sẽ là giá trị của x làm cho vế trái $= 0$

Bước 2: Sử dụng chức năng CALC hoặc MODE 7 hoặc SHIFT SOLVE để kiểm tra xem nghiệm . Một giá trị được gọi là nghiệm nếu thay giá trị đó vào vế trái thì được kết quả là 0

Bước 3: Tổng hợp kết quả và chọn đáp án đúng nhất

***Đánh giá chung:** Sử dụng CALC sẽ hiệu quả nhất trong 3 cách

Chú ý : Nhập giá trị $\log_a b$ vào máy tính casio thì ta nhập $\log a : \log b$

2)VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017]

Phương trình $\log_2 x \log_4 x \log_6 x = \log_2 x \log_4 x + \log_4 x \log_6 x + \log_6 x \log_2 x$ có tập nghiệm là :

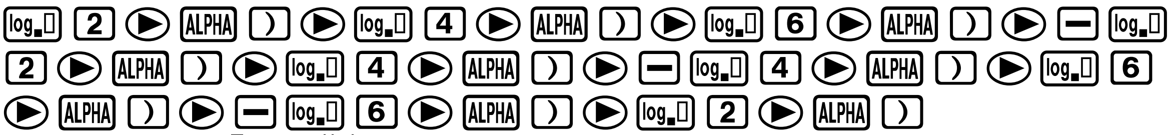
A. $\{1\}$ **B.** $\{2;4;6\}$ **C.** $\{1;12\}$ **D.** $\{1;48\}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Chuyển phương trình về dạng : $\log_2 x \log_4 x \log_6 x - \log_2 x \log_4 x - \log_4 x \log_6 x - \log_6 x \log_2 x = 0$

Nhập vế trái vào máy tính Casio

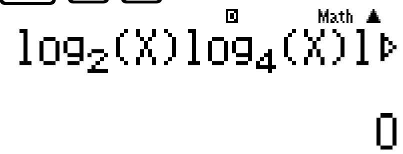




➢ Vì giá trị 1 xuất hiện nhiều nhất nên ta kiểm tra xem 1 có phải là nghiệm không. Nếu 1 là nghiệm thì đáp án đúng chỉ có thể là **A**, **C**, **D**. Còn nếu 1 không phải là nghiệm thì đáp án chứa 1 là **A**, **C**, **D** sai dẫn đến **B** là đáp án đúng.

Ta sử dung chức năng CALC

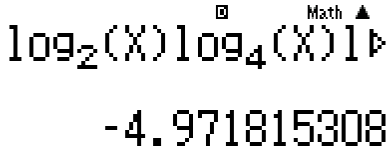




Vậy 1 là nghiệm.

➢ Ta tiếp tục kiểm tra giá trị 12 có phải là nghiệm không

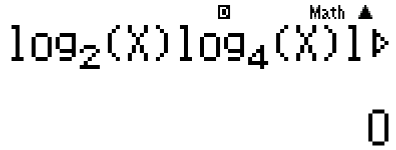
r12=



Đây là một kết quả khác 0 vậy 12 không phải là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án **C** sai

➢ Tiếp tục kiểm tra giá trị 48 có phải là nghiệm không

r48=



Vậy 48 là nghiệm chứng tỏ **D** là đáp án chính xác.

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Điều kiện $x>0$
- Trường hợp 1 : Với $x=1$ thì $\log_2 0=\log_4 0=\log_6 x=0$. Thế vào phương trình ban đầu thấy thảo mãn vậy $x=1$ là 1 nghiệm.
- Trường hợp 2 : Với $x>0; x\neq 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_x 2.\log_x 4.\log_x 6}=\dfrac{1}{\log_x 2.\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_x 4.\log_x 6}+\dfrac{1}{\log_x 6.\log_x 2}$

$\Leftrightarrow 1=\log_x 6+\log_x 4+\log_x 2$

$\Leftrightarrow 1=\log_x 48$

$\Leftrightarrow x=48$

<u>VD2</u>-[Thi HK1 THPT Liên Hà – Đông Anh năm 2017]

Tập nghiệm của phương trình $3^{x-1}.5^{\frac{2x-2-m}{x-m}}=15$ (m là tham số) là :

A. $\{2;m\log_3 5\}$ **B.** $\{2;m+\log_3 5\}$ **C.** $\{2\}$ **D.** $\{2;m-\log_3 5\}$

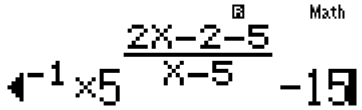
GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➢ Đề bài không cho điều kiện ràng buộc của m nên ta chọn một giá trị m bất kì. Ví dụ $m=5$ Phương trình trở thành : $3^{x-1}.5^{\frac{2x-2-5}{x-5}}=15\Leftrightarrow 3^{x-1}.5^{\frac{2x-2-5}{x-5}}-15=0$

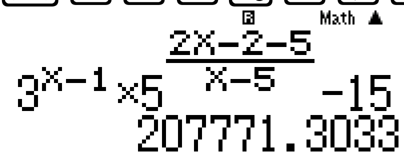
Nhập phương trình vào máy tính Casio





➢ Đáp án nào cũng có 2 nên không cần kiểm tra. Kiểm tra nghiệm $x=m\log_3 5=5\log_3 5$.

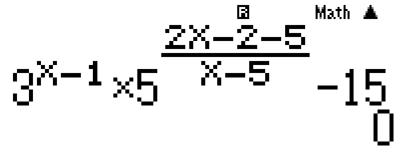




Ra một kết quả khác 0 $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

➢ Tương tự tra nghiệm $x=m-\log_3 5=5-\log_3 5$

r5pg5)Pg3)=



Ra kết quả bằng 0 vậy $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Phương trình $3^{x-1}.5^{\frac{2x-2-m}{x-m}}=15 \Leftrightarrow 3^{x-1}.5^{\frac{2x-2-m}{x-m}}=3^1.5^1 \Leftrightarrow 5^{\frac{2x-2-m}{x-m}-1}=3^{1-(x-1)} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{x-m}}=3^{2-x}$ (1)
- Logarit hóa hai vế theo cơ số 5. (1) $\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-m}=(2-x)\log_5 3$

Trường hợp 1 : Với $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

Trường hợp 2 : $\frac{1}{x-m}=-\log_5 2 \Leftrightarrow x-m=\frac{1}{\log_5 2} \Leftrightarrow x=m-\log_2 5$

VD3-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai Tp.HCM 2017] Gọi x_1 và x_2 là 2 nghiệm của phương trình $5^{2x+1}-8.5^x+1=0$. Khi đó :

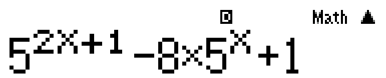
A. $x_1+x_2=1$ **B.** $x_1+x_2=-2$ **C.** $x_1+x_2=2$ **D.** $x_1+x_2=-1$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO SHOLVE+CALC**

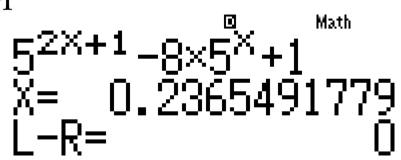
Nhập vế trái vào máy tính Casio. Rồi nhấn phím =để lưu lại phương trình =





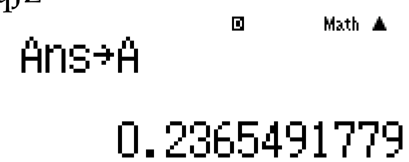
➢ Vì đáp án không cho 1 giá trị cụ thể nên ta không thể sử dụng được chức năng CALC mà phải sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE. Ta dò nghiệm với giá trị x gần 1 chả hạn

qr1=



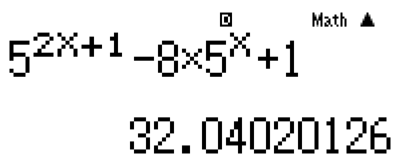
Vậy 1 là nghiệm. Ta lưu nghiệm này vào biến A rồi coi đây là nghiệm x_1

qJz



➢ Ta có $x_1=A$ Nếu đáp án **A** là $x_1+x_2=1$ đúng thì $x_2=1-A$ phải là nghiệm. Ta gọi lại phương trình ban đầu rồi CALC với giá trị $1-A$

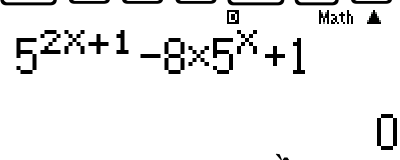
Er1pQz=



Kết quả ra khác 0 vậy $1-A$ không phải là nghiệm hay đáp án **A** sai

Tương tự như vậy ta CALC với các giá trị x_2 của đáp án B, C, D. Cuối cùng ta thấy giá trị $-1-A$ là nghiệm. $\Rightarrow$ Vậy đáp số chính xác là **D**

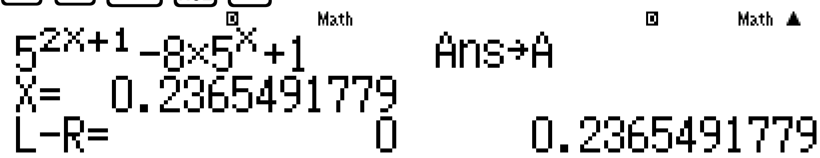
CALC − 1 − ALPHA (−) =



❖ **<u>Cách 2</u> : CASIO 2 LẦN SHIFT SOLVE**

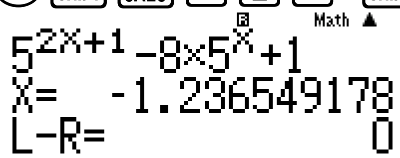
Nhập vế trái vào máy tính Casio. Nhấn nút để lưu vế trái lại rồi SHIFT SOLVE tìm nghiệm thứ nhất và lưu vào A

5 $x^■$ 2 ALPHA) + 1 ▶ − 8 × 5 $x^■$ ALPHA) ▶ + 1 = SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL (−)



Gọi lại vế trái. SHIFT SOLVE một lần nữa để tìm nghiệm thứ hai và lưu vào B

▲ SHIFT CALC − 2 = SHIFT RCL °’’’



Ta có $A+B=-1$

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Đặt $5^x=t$ khi đó $5^{2x}=\left(5^x\right)^2=t^2$. Phương trình $\Leftrightarrow 5t^2-8t+1=0$ $\Leftrightarrow t=\dfrac{4\pm\sqrt{11}}{5}$
- Với $t=\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}\Leftrightarrow 5^x=\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}\Leftrightarrow x=\log_5\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}$

  Với $t=\dfrac{4-\sqrt{11}}{5}\Leftrightarrow 5^x=\dfrac{4-\sqrt{11}}{5}\Leftrightarrow x=\log_5\dfrac{4-\sqrt{11}}{5}$
- Vậy $x_1+x_2=\log_5\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}+\log_5\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}=\log_5\left(\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}\right).\left(\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}\right)=\log_5\dfrac{1}{5}=-1$

<u>VD4</u>-[Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang 2017] Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 $\left(x_1<x_2\right)$. Giá trị $A=2x_1+3x_2$ là :

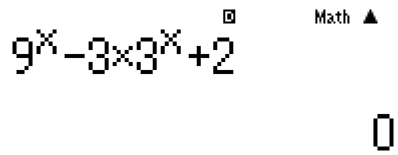
A. $4\log_3 2$ **B.** 1 **C.** $3\log_3 2$ **D.** $2\log_2 3$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO SHIFT SLOVE + CALC**

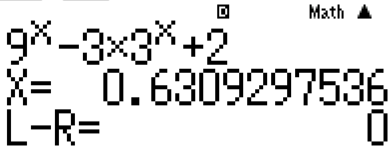
➢ Nhập vế trái vào máy tính Casio rồi nhấn nút để lưu phương trình

9 $x^■$ ALPHA) ▶ − 3 × 3 $x^■$ ALPHA) ▶ + 2 =



- Vì chưa biết 2 đáp án , mà 2 đáp án vai trò không bình đẳng trong quan hệ ở đáp án. Nên ta phải sử dụng dò cả 2 nghiệm với chức năng SHIFT SOLVE ở mức độ khó hơn . Đầu tiên ta dò nghiệm trong khoảng dương, chả hạn chọn X gần với 1





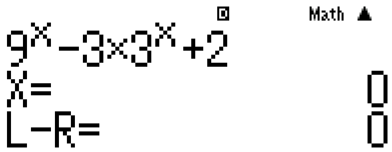
Lưu nghiệm này vào giá trị A ta được 1 nghiệm.

qJz



- Vì vừa dò với 1 giá trị dương rồi bây giờ ta dò nghiệm trong khoảng âm, chả hạn chọn X gần -2 . Gọi là phương trình và dò nghiệm

Eqrp2=

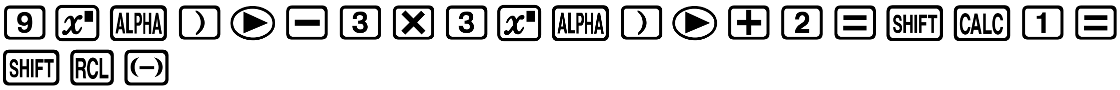


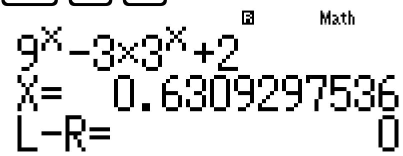
Ta được 1 nghiệm nữa là 0. Vì $0 < A$ nên $x_1 = 0; x_2 = A$ ta có $2x_1 + 3x_2 = 2.0 + 3.A \approx 1.8927 = 3\log_3 2$

Vậy đáp số đúng là **C**

❖ <u>Cách 2</u> **: CASIO 2 LẦN SHIFT SOLVE**

Nhập vế trái vào máy tính Casio. Nhấn nút để lưu vế trái lại rồi SHIFT SOLVE tìm nghiệm thứ nhất và lưu vào A

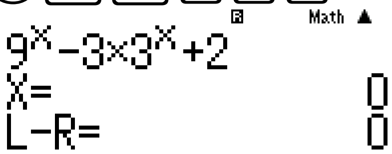






Gọi lại vế trái. SHIFT SOLVE một lần nữa để tìm nghiệm thứ hai và lưu vào B





Ta có $2A + 3B \approx 1.8927 = 3\log_3 2$

❖ <u>**Cách tham khảo**</u> **: Tự luận**

- Đặt $3^x = t$ khi đó $9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2.x} = \left(3^x\right)^2 = t^2$
- Phương trình $\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.
- Với $t = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

  Với $t = 2 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$

Vậy $2x_1+3x_2=2.0+3.\log_3 2=3\log_3 2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử tính Lâm Đồng - Hà Nội 2017] Giải phương trình $2^{2x^2-4x+1}=8^{x-1}$

A. Vô nghiệm **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\x=2\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}\\x=2\end{array}\right.$ **D.** $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

Bài 2-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Phương trình $\log_2 x+\log_2\left(x^2\right)=\log_2\left(4x\right)$

A. $\{0;-2;2\}$ **B.** $\{0;2\}$ **C.** $\{-2;2\}$ **D.** $\{2\}$

Bài 3-[THPT Lục Ngạn – Bắc Giang 2017] Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ có tích các nghiệm là :

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 2

Bài 4-[THPT Nguyễn Gia Thiều -HN 2017]

Tích các nghiệm của phương trình $\left(5+\sqrt{24}\right)^x+\left(5-\sqrt{24}\right)^x=10$ là :

A. 1 **B.** 6 **C.** -4 **D.** 1

Bài 5-[THPT Nguyễn Gia Thiều -HN 2017]

Tổng các nghiệm của phương trình $25^x-2(3-x).5^x+2x-7=0$ là :

A. 1 **B.** 6 **C.** 2 **D.** -9

Bài 6-[THPT Phạm Hồng Thái -HN 2017]

Phương trình $\log_2(2x).\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)=2$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn biểu thức :

A. $x_1x_2=-2$ **B.** $x_1+x_2=\frac{3}{4}$ **C.** $x_1x_2=\frac{1}{2}$ **D.** $x_1+x_2=-1$

Bài 7-[THPT Phạm Hồng Thái -HN 2017]

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có 2 nghiệm $x_1x_2=27$

A. $m=\frac{4}{3}$ **B.** $m=1$ **C.** $m=25$ **D.** $m=\frac{28}{3}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

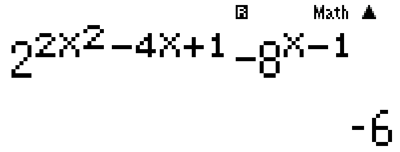
Bài 1-[Thi thử tính Lâm Đồng - Hà Nội 2017] Giải phương trình $2^{2x^2-4x+1}=8^{x-1}$

A. Vô nghiệm **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\x=2\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}\\x=2\end{array}\right.$ **D.** $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$

GIẢI

- Phương trình $2^{2x^2-4x+1}-8^{x-1}=0$. Nhập vào máy tính Casio rồi kiểm tra giá trị $x=2$

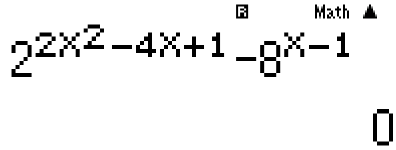
2 x■ 2 ALPHA) x² − 4 ALPHA) + 1 ▶ − 8 x■ ALPHA) − 1 CALC 2 =

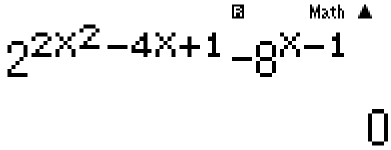


$F(2)=-6 \Rightarrow$ Đáp số **B** và **C** sai

- Kiểm tra giá trị $x=\frac{7+\sqrt{17}}{4}$ và $x=\frac{7+\sqrt{17}}{4}$

CALC (7 + √ 1 7)) ÷ 4 = CALC (7 − √ 1 7)) ÷ 4 =





$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

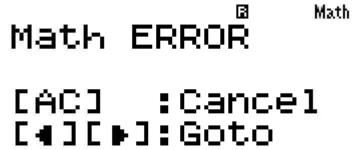
Bài 2-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Phương trình $\log_2 x+\log_2\left(x^2\right)=\log_2(4x)$

A. $\{0;-2;2\}$ **B.** $\{0;2\}$ **C.** $\{-2;2\}$ **D.** $\{2\}$

GIẢI

- Phương trình $\log_2 x+\log_2\left(x^2\right)-\log_2(4x)=0$. Nhập vào máy tính Casio rồi kiểm tra giá trị $x=0$

log▫□ 2 ▶ ALPHA) ▶ + log▫□ 2 ▶ ALPHA) x² ▶ − log▫□ 2 ▶ 4 ALPHA) CALC 0 =



Không tính được (vì $x=0$ không thuộc tập xác định) $\Rightarrow$ Đáp số **A** và **B** sai

- Kiểm tra giá trị $x=-2$ $\Rightarrow$ Vẫn không tính được $\Rightarrow$ Đáp số **C** sai $\Rightarrow$ Tóm lại đáp số **D** chính xác

◀ CALC − 2 =



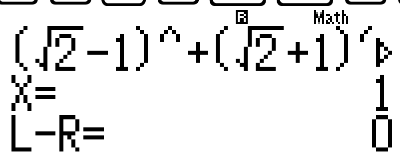
Bài 3-[THPT Lục Ngạn – Bắc Giang 2017] Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ có tích các nghiệm là :

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 2

GIẢI

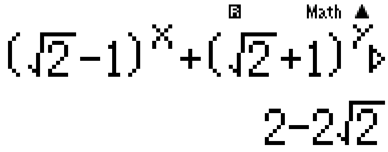
Nhập phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ vào máy tính Casio rồi dùng chức năng SHIFT SOLVE để dò nghiệm. Ta được 1 nghiệm là 1

(√ 2 ▶ − 1) x■ ALPHA) ▶ + (√ 2 ▶ + 1) x■ ALPHA) ▶ − 2 √ 2 SHIFT CALC 2 =



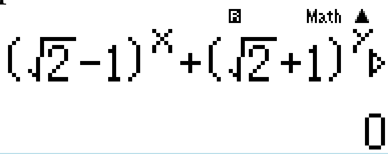
- Nếu đáp số A đúng thì nghiệm còn lại là 0 . Sử dụng chức năng CALC để kiểm tra. Ra một kết quả khác 0 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

r0=



- Tương tự vậy, kiểm tra đáp số B với giá trị $x=-1$ là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp số B chính xác

rp1=



Bài 4-**[THPT Nguyễn Gia Thiều -HN 2017]**

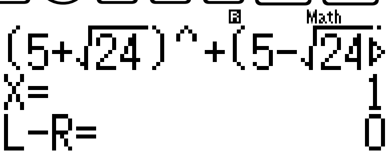
Tích các nghiệm của phương trình $\left(5+\sqrt{24}\right)^x+\left(5-\sqrt{24}\right)^x=10$ là :

A. 1 **B.** 6 **C.** –4 **D.** 1

GIẢI

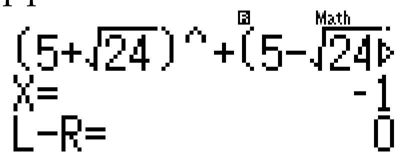
- Phương trình $\Leftrightarrow\left(5+\sqrt{24}\right)^x+\left(5-\sqrt{24}\right)^x-10=0$. Nhập vế trái vào máy tính Casio rồi dùng [hyp] [ln] ú [hyp] [S⇔D] ă [S⇔D] [log] (∛■) ($e^■$) (Σ■) (■√□) (■) (∛■) [×] (π) [EXE] [▲] để [x^2] ò [S⇔D] [log] [ln] [log■□] ệ [M+] [•] (■) [■] đượ [hyp] [1] [S⇔D] [log] [ln] [log■□] ệ [M+] [tan] à [1]

[(] [5] [+] [√■] [2] [4] [▶] [)] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [(] [5] [−] [√■] [2] [4] [▶] [)] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [0] [SHIFT] [CALC] [2] [=]



- Tiếp tục SHIFT SOLVE một lần nữa để tìm nghiệm còn lại $\Rightarrow$ Nghiệm còn lại là $x=-1$

qrp2=



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 5-**[THPT Nguyễn Gia Thiều -HN 2017]**

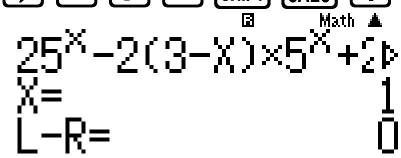
Tổng các nghiệm của phương trình $25^x-2(3-x).5^x+2x-7=0$ là :

A. 1 **B.** 6 **C.** 2 **D.** –9

GIẢI

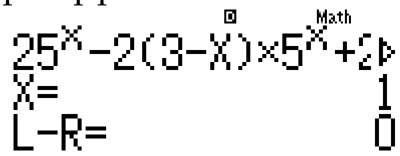
- Phương trình $25^x-2(3-x).5^x+2x-7=0$. Nhập vế trái vào máy tính Casio rồi dùng chức năng SHIFT SOLVE để dò nghiệm. Ta được 1 nghiệm là 1

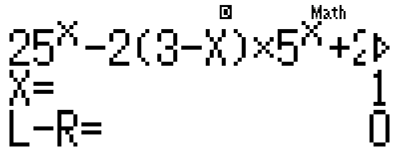
[2] [5] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [−] [2] [(] [3] [−] [ALPHA] [)] [)] [×] [5] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [2] [ALPHA] [)] [−] [7] [=] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



- Tiếp tục SHIFT SOLVE một lần nữa để tìm nghiệm còn lại $\Rightarrow$ Nghiệm còn lại là $x=-1$

qr5=qrp5=





Không còn nghiệm nào ngoài 1 vậy phương trình có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

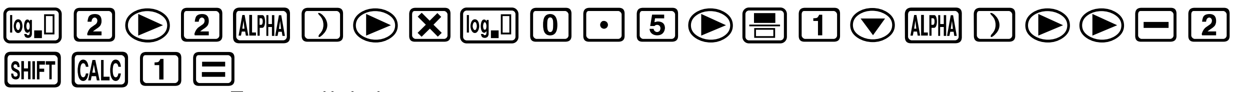
<u>Bài 6</u>-[THPT Phạm Hồng Thái -HN 2017]

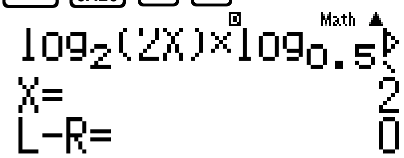
Phương trình $\log_2(2x).\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)=2$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn biểu thức :

A. $x_1x_2=-2$ **B.** $x_1+x_2=\frac{3}{4}$ **C.** $x_1x_2=\frac{1}{2}$ **D.** $x_1+x_2=-1$

GIẢI

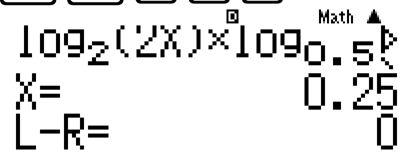
- Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(2x).\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)-2=0$. Nhập vế trái vào máy tính Casio rồi dùng chức năng SHIFT SOLVE để dò nghiệm. Ta được 1 nghiệm là 2





- Tiếp tục SHIFT SOLVE một lần nữa để tìm nghiệm còn lại $\Rightarrow$ Nghiệm còn lại là $x=-1$





Rõ ràng $x_1.x_2=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

<u>Bài 7</u>-[THPT Phạm Hồng Thái -HN 2017]

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có 2 nghiệm $x_1x_2=27$

A. $m=\frac{4}{3}$ **B.** $m=1$ **C.** $m=25$ **D.** $m=\frac{28}{3}$

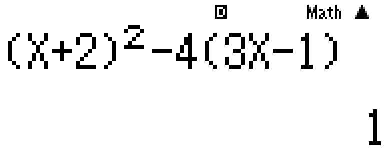
GIẢI

- Để dễ nhìn ta đặt ẩn phụ $t=\log_3 x$. Phương trình $\Leftrightarrow t^2-(m+2)t+3m-1=0$ (1)

  Ta có : $x_1x_2=27\Leftrightarrow \log_3(x_1x_2)=\log_3 27\Leftrightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=3\Leftrightarrow t_1+t_2=3$
- Khi đó phương trình bậc hai (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $t_1+t_2=3$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases}\Delta=(m+2)^2-4(3m-1)>0\\ S=t_1+t_2=m+2=3\end{cases}$$





Vậy $m=1$ thỏa mãn hệ phương trình (*) $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 10. TÌM SỐ NGHIÊM PHƯƠNG TRÌNH – LOGARIT (P1).

1) PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG MODE 7

Tổng hợp phương pháp

Bước 1: *Chuyển PT về dạng Vế trái = 0*

Bước 2: *Sử dụng chức năng MODE 7 để xét lập bảng giá trị của vế trái*

Bước 3: *Quan sát và đánh giá : +) Nếu* $F(\alpha)=0$ *thì* α *là 1 nghiệm*

+) Nếu $F(a).F(b)<0$ *thì PT có 1 nghiệm thuộc* $(a;b)$

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[THPT Phạm Hồng Thái – Hà Nội 2017]

Số nghiệm của phương trình $6.4^x-12.6^x+6.9^x=0$ là ;

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

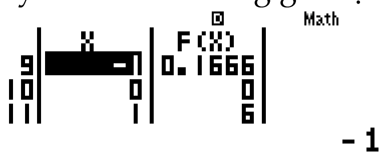
➢ Khởi động chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của Casio rồi nhập hàm : [MODE] [7] [6] [×] [4] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [2] [×] [6] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [6] [×] [9] [$x^■$] [ALPHA] [)]



➢ Thiết lập miền giá trị của X là : Start –9 End 10 Step 1

[=] [=] [−] [9] [=] [1] [0] [=] [1] [=]

Máy tính cho ta bảng giá trị :



Ta thấy khi $x=0$ thì $F(0)=0$ vậy $x=0$ là nghiệm.

➢ Tiếp tục quan sát bảng giá trị $F(X)$ nhưng không có giá trị nào làm cho $F(X)=0$ hoặc khoảng nào làm cho $F(X)$ đổi dấu. Điều này có nghĩa $x=0$ là nghiệm duy nhất

Kết luận : Phương trình ban đầu có 1 nghiệm $\Rightarrow$ Ta chọn đáp án **B**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Vì $9^x>0$ nên ta có thể chia cả 2 vế cho 9^x

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 6.\frac{4^x}{9^x}-12.\frac{6^x}{9^x}+6=0$

$\Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-12.\left(\frac{2}{3}\right)^x+6=0$ (1)

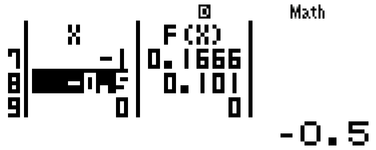
▪ Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ là t thì $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=t^2$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 6t^2-12t+6=0 \Leftrightarrow 6(t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$

- Vậy $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

❖ **Bình luận :**

- Để sử dụng phương pháp Casio mà không bị sót nghiệm ta có thể sử dụng vài thiết lập miền giá trị của X để kiểm tra. Ngoài Start -9 End 10 Step 1 ta có thể thiết lập Start -4 End 5 Start 0.5

  [=] [=] [−] [4] [=] [5] [=] [0] [.] [5] [=]



  Ta quan sát bảng giá trị vẫn có 1 nghiệm $x = 0$ duy nhất vậy ta có thể yên tâm hơn về lựa chọn của mình.

- Theo cách tự luận ta thấy các số hạng đều có dạng bậc 2. Ví dụ $4^x = \left(2^x\right)^2$ hoặc $6^x = 2^x.3^x$ vậy ta biết đây là phương trình dạng đẳng cấp bậc 2.
- Dạng phương trình đẳng cấp bậc 2 là phương trình có dạng $ma^2 + nab + pb^2 = 0$ ta giaỉ bằng cách chia cho b^2 rồi đặt ẩn phụ là $\frac{a}{b} = t$

VD2-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Số nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$ trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ là :

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

GIẢI

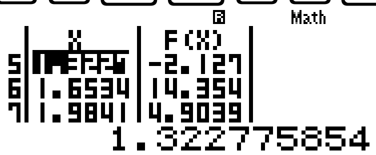
❖ **Cách 1 : CASIO**

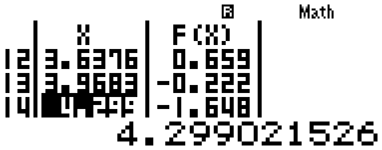
➢ Chuyển phương trình về dạng : $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} - \tan x = 0$

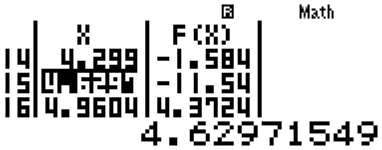
  Sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 0 End 2π Step $\frac{2\pi - 0}{19}$

  [SHIFT] [MODE] [4] [MODE] [7] [ALPHA] [x10^x] [x^■] [sin] [ALPHA] [)] [−] [▭] [ALPHA] [x10^x] [▼] [4] [▶] [)] [▶] [−] [tan] [ALPHA] [)] [)] [=] [=] [0] [=] [2] [SHIFT] [x10^x] [=] [2] [SHIFT] [x10^x] [÷] [1] [9] [=]









➢ Quan sát bảng giá trị ta thấy 3 khoảng đổi dấu như trên :

  $f(0.6613).f(0.992) < 0 \Rightarrow$ có nghiệm thuộc khoảng $(0.6613;0.992)$

  $f(1.3227).f(1.6634) < 0 \Rightarrow$ có nghiệm thuộc khoảng $(1.3227;1.6534)$

  $f(3.6376).f(3.9683) < 0 \Rightarrow$ có nghiệm thuộc khoảng $(3.6376;3.9683)$

  $f(4.6297).f(4.9604) < 0 \Rightarrow$ có nghiệm thuộc khoảng $(4.6297;4.9604)$

Kết luận : Phương trình ban đầu có 4 nghiệm $\Rightarrow$ Ta chọn đáp án **D**

❖ **Bình luận :**

- Đề bài yêu cầu tìm nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ nên Start = 0 và End = 2π
- Máy tính Casio tính được bảng giá trị gồm 19 giá trị nên bước nhảy Step = $\frac{2\pi - 0}{19}$

VD3-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017] Phương trình $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3x}{x-1}} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x}$ có số nghiệm âm là :

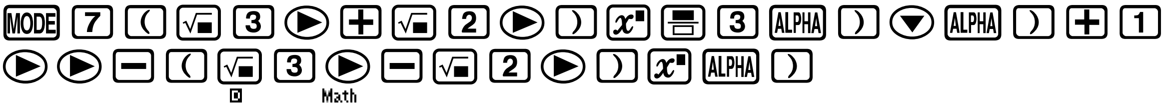
A. 2 nghiệm **B.** 3 nghiệm **C.** 1 nghiệm **D.** Không có

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

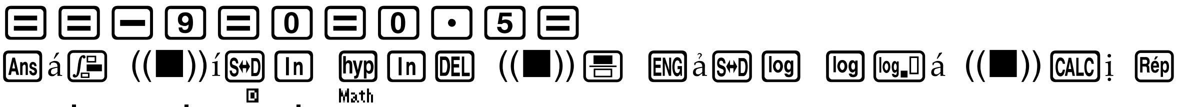
➢ Chuyển phương trình về dạng : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3x}{x-1}} - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x} = 0$

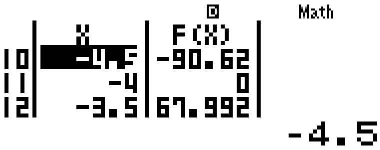
Khởi động chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của Casio rồi nhập hàm :





➢ Vì đề bài yêu cầu nghiệm âm nên ta hiết lập miền giá trị của X là : Start -9 End 0 Step 0.5





Ta thấy khi $x=-4$ thì $F(-4)=0$ vậy $x=-4$ là nghiệm.

➢ Tiếp tục quan sát bảng giá trị $F(X)$ nhưng không có giá trị nào làm cho $F(X)=0$ hoặc khoảng nào làm cho $F(X)$ đổi dấu.

Điều này có nghĩa $x=-4$ là nghiệm âm duy nhất

Kết luận : Phương trình ban đầu có 1 nghiệm âm $\Rightarrow$ Ta chọn đáp án **C**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Logarit hai vế theo cơ số dương $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Phương trình $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3x}{x-1}} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x} \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3x}{x-1}} = \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x}$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} = x\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} = -x \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{x+1}+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+1=-3 \Leftrightarrow x=-4 \end{array}\right.$

- $x=-4$ thỏa điều kiện. Vậy ta có $x=-4$ là nghiệm âm thỏa phương trình

❖ **Bình luận :**

- Phương trình trên có 2 cơ số khác nhau và số mũ có nhân tử chung. Vậy đây là dấu hiệu của phương pháp Logarit hóa 2 vế
- Thực ra phương trình có 2 nghiệm $x=0; x=-4$ nhưng đề bài chỉ hỏi nghiệm âm nên ta chỉ chọn nghiệm $x=-4$ và chọn đáp án **C** là đáp án chính xác

- Vì đề bài hỏi nghiệm âm nên ta thiết lập miền giá trị của x cũng thuộc miền âm $(-9;0)$

VD4-[THPT Yến Thế - Bắc Giang 2017] Số nghiệm của phương trình $\left(3-\sqrt{5}\right)^x+7\left(3+\sqrt{5}\right)^x=2^{x+3}$ là :

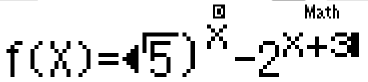
A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 1

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Chuyển phương trình về dạng : $\left(3-\sqrt{5}\right)^x+7\left(3+\sqrt{5}\right)^x-2^{x+3}=0$

Khởi động chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của Casio rồi nhập hàm : w7(

➢ Thiết lập miền giá trị của X là : Start -9 End 10 Step 1

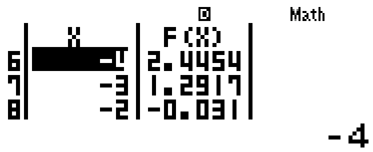


Máy tính cho ta bảng giá trị :



Ta thấy khi $x=0$ thì $F(0)=0$ vậy $x=0$ là nghiệm.

➢ Tiếp tục quan sát bảng giá trị $F(X)$



Ta lại thấy $f(-3).f(-2)<0$ vậy giữa khoảng $(-3;-2)$ tồn tại 1 nghiệm

Kết luận : Phương trình ban đầu có 2 nghiệm $\Rightarrow$ Ta chọn đáp án **A**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Vì $2^x>0$ nên ta có thể chia cả 2 vế cho 2^x

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x+7\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x-8=0$

▪ Đặt $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$ thì $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}$. Khi đó (1)

$\Leftrightarrow t+7.\dfrac{1}{t}-8=0\Leftrightarrow t^2-8t+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=7\end{array}\right.$

▪ Với $t=1\Leftrightarrow\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$

Với $t=7\Leftrightarrow\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=7\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}7$

Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x=0; x=\log_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} 7$

❖ **Bình luận :**

- Nhắc lại một lần nữa nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $(a;b)$
- Ta nhận thấy 2 đại lượng nghịch đảo quen thuộc $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ và $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ nên ta tìm cách để tạo ra 2 đại lượng này bằng cách chia cả 2 vế của phương trình cho 2^x

VD 5 : Số nghiệm của bất phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$ (1) là :

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Chuyển bất phương trình (1) về dạng : $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}-\frac{4}{2-\sqrt{3}}=0$

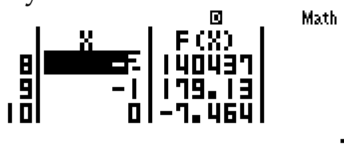
➢ Nhập vế trái vào máy tính Casio : $F(X)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}-\frac{4}{2-\sqrt{3}}$

(2 + √■ 3 ▶) x■ ALPHA) x² − 2 ALPHA) + 1 ▶ + (2
− √■ 3 ▶) x■ ALPHA) x² − 2 ALPHA) − 1 ▶ − ▭ 4 ▼ 2
− √■ 3 ▶ ▶

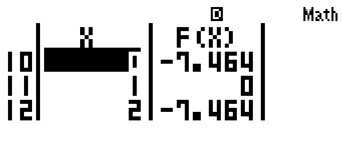
➢ Thiết lập miền giá trị cho x với Start -9 End 9 Step 1

= − 9 = 9 = 1 =

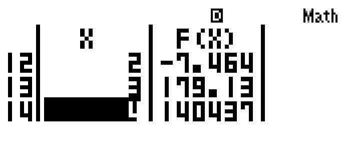
➢ Máy tính Casio cho ta bảng giá trị :



Ta thấy $f(-1).f(0)<0$ vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc $(-1;0)$



Ta thấy $f(1)=0$ vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình (1)



Lại thấy $f(2).f(3)<0$ vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc $(2;3)$

➢ **Kết luận :** Phương trình (1) có 3 nghiệm $\Rightarrow$ Chọn đáp án **C**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Số nghiệm của phương trình $\log(x-1)^2=\sqrt{2}$ là :

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Một số khác

Bài 2-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]

Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1\right]=0$ là :

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Bài 3-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017] Phương trình $3^{x^2-2x-3}+3^{x^2-3x+2}=3^{2x^2-5x-1}+1$

A. Có ba nghiệm thực phân biệt **B.** Vô nghiệm

C. Có hai nghiệm thực phân biệt **D.** Có bốn nghiệm thực phân biệt

Bài 4-[THPT HN Amsterdam 2017] Tìm số nghiệm của phương trình $2^{\frac{1}{x}}+2^{\sqrt{x}}=3$:

A. 1 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** Không có nghiệm

Bài 5-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017]

Cho phương trình $2\log_2 x+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x-2\sqrt{x}+2\right)$. Số nghiệm của phương trình là ;

A. 2 nghiệm **B.** Vô số nghiệm **C.** 1 nghiệm **D.** Vô nghiệm

Bài 6-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]

Tìm số nghiệm của phương trình $\log(x-2)^2=2\log x+\log_{\sqrt{10}}(x+4)$

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

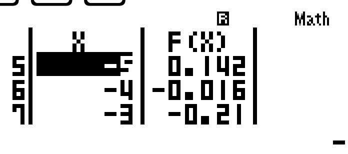
Bài 1-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Số nghiệm của phương trình $\log(x-1)^2=\sqrt{2}$ là

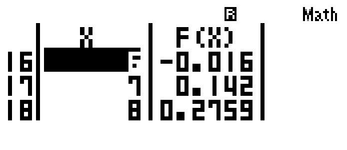
A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Một số khác

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow \log(x-1)^2-\sqrt{2}=0$. Sử dụng chức năng MODE 7 để tìm số nghiệm với Start -9 End 10 Step 1

MODE 7 log (ALPHA) − 1)) DEL x^2) − √■ 2 = = − 9 = 1 0 = 1 =





Ta thấy có hai khoảng đổi dấu $\Rightarrow$ Phương trình ban đầu có 2 nghiệm

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Chú ý : Để tránh bỏ sót nghiệm ta thường thử thêm 1 hoặc 2 lần nữa với hai khoảng Start End khác nhau Ví dụ Start -29 End -10 Step 1 hoặc Sart 11 End 30 Step 1. Ta thấy không có khoảng đổi dấu nào nữa

$\Rightarrow$ Chắc ăn hơn với 2 nghiệm tìm được

Bài 2-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]

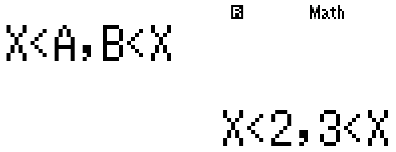
Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1\right]=0$ là :

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

GIẢI

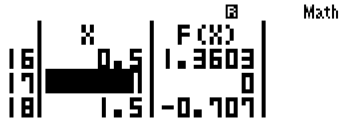
- Tìm điều kiện của phương trình : $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\x<2\end{array}\right.$

MODE ▼ 1 1 1 1 = − 5 = 6 = =



- Phương trình $(x-2)\left[\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1\right]=0$. Vì điều kiện chia hai khoảng nên ta MODE 7 hai lần. Lần thứ nhất với Start -7 End 2 Step 0.5

MODE 7 (ALPHA) − 2) (log□ 0 . 5 ▶ ALPHA) x² − 5 ALPHA) + 6 ▶ + 1) = = − 7 = 2 = 0 . 5 =

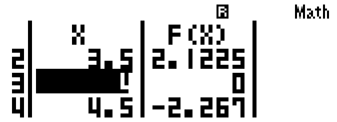


1

Ta thấy có 1 nghiệm $x=1$

Lần thứ hai với Start 3 End 12 Start 0.5

AC = = 3 = 1 2 = 0 . 5 =



4

Ta lại thấy có nghiệm $x=4$ $\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm 1 và 4 . $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

Bài 3-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017] Phương trình $3^{x^2-2x-3}+3^{x^2-3x+2}=3^{2x^2-5x-1}+1$

A. Có ba nghiệm thực phân biệt **B.** Vô nghiệm
C. Có hai nghiệm thực phân biệt **D.** Có bốn nghiệm thực phân biệt

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow 3^{x^2-2x-3}+3^{x^2-3x+2}-3^{2x^2-5x-1}-1=0$. Sử dụng MODE 7 với Start -9 End 0 Step 0.5

MODE 7 3 x■ ALPHA) x² − 2 ALPHA) − 3 ▶ + 3 x■ ALPHA) x² − 3 ALPHA) + 2 ▶ − 3 x■ 2 ALPHA) x² − 5 ALPHA) − 1 ▶ − 1 = = − 9 = 0 = 0 . 5 =

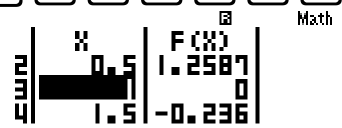


-1

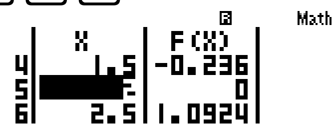
Ta thấy có 1 nghiệm $x=-1$

- Tiếp tục MODE 7 với Start 0 End 9 Step 0.5

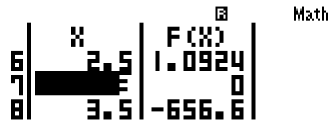
AC = = 0 = 9 = 0 . 5 =



1



2



3

Ta lại thấy có thêm ba nghiệm $x=1;2;3$ $\Rightarrow$ Tổng cộng 4 nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

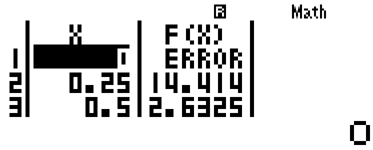
Bài 4-[THPT HN Amsterdam 2017] Tìm số nghiệm của phương trình $2^{\frac{1}{x}}+2^{\sqrt{x}}=3$:

A. 1 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** Không có nghiệm

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} + 2^{\sqrt{x}} - 3 = 0$ (điều kiện $x \geq 0$). Sử dụng MODE 7 với Start 0 End 4.5 Step 0.25

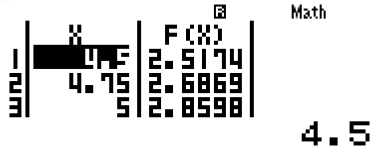
[MODE] [7] [2] [$x^{■}$] [▭] [1] [▼] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [+] [2] [$x^{■}$] [√■] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [−] [3] [=] [=] [0] [=] [4] [.] [5] [=] [0] [.] [2] [5] [=]



Trên đoạn $[0;4.5]$ không có nghiệm nào

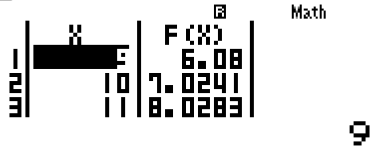
- Tiếp tục MODE 7 với Start 4.5 End 9 Step 0.25

[AC] [=] [=] [4] [.] [5] [=] [9] [=] [0] [.] [2] [5] [=]



Dự đoán phương trình vô nghiệm. Để chắn ăn hơn ta thử lần cuối với Start 9 End 28 Step 1

[AC] [=] [=] [9] [=] [2] [8] [=] [1] [=]



Giá trị của $F(X)$ luôn tăng đến $+\propto$ $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

Bài 5-**[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017]**

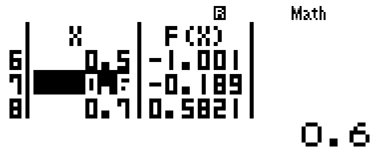
Cho phương trình $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right)$. Số nghiệm của phương trình là ;

A. 2 nghiệm **B.** Vô số nghiệm **C.** 1 nghiệm **D.** Vô nghiệm

GIẢI

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2 x + \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right) = 0$ (điều kiện $0 \leq x \leq 1$). Sử dụng MODE 7 với (³√■)((■)) [▭] [CALC] ((■)) 0 [▲] [S⇔D] [x^2] [1] (³√■)((■)) [Abs] [−] 0.1

[MODE] [7] [2] [log■□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [+] [log■□] [▭] [1] [▼] [3] [▶] [▶] [1] [−] [√■] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [−] [▭] [1] [▼] [2] [▶] [log■□] [√■] [2] [▶] [▶] [ALPHA] [)] [−] [2] [√■] [ALPHA] [)] [▶] [+] [2] [=] [=] [0] [=] [1] [=] [0] [.] [1] =



Ta thấy có 1 nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0.6;0.7) \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

Bài 6-**[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]**

Tìm số nghiệm của phương trình $\log(x-2)^2 = 2\log x + \log_{\sqrt{10}}(x+4)$

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow \log(x-2)^2 - 2\log x - \log_{\sqrt{10}}(x+4) = 0$ (điều kiện $x \geq 0$). Sử dụng MODE 7 với Start 0 End 4.5 Step 0.25

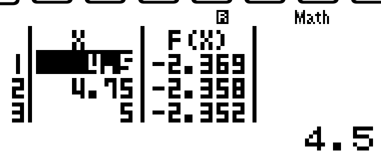
MODE 7 log (ALPHA) − 2) x^2) − 2 log ALPHA)) − $\log_{\blacksquare}\square$ $\sqrt{\blacksquare}$ 1 0 ▶ ▶ ALPHA) + 4 = = 0 = 4 • 5 = 0 • 2 5 =



Trên đoạn $[0;4.5]$ có 1 nghiệm

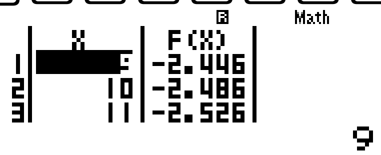
- Tiếp tục MODE 7 với Start 4.5 End 9 Step 0.25

AC = = 4 • 5 = 9 = 0 • 2 5 =



Trên khoảng này không thu được nghiệm nào. Để chắn ăn hơn ta thử lần cuối với Start 9 End 28 Step 1

AC = = 9 = 2 8 = 1 =



Cũng không thu được nghiệm $\Rightarrow$ Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 11. TÌM SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT (P2).

1) PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG SHIFT SOLVE

Bài toán đặt ra : Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=x^2-3x+1$?

Xây dựng phương pháp :

- Chuyển bài toán về dạng Vế trái $=0$ khi đó $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}-x^2+3x-1=0$ và đặt $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}-x^2+3x-1$
- Nhập vế trái vào màn hình máy tính Casio
  [√■] [ALPHA] [)] [▶] [+] [√■] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [−] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [−] [1]
  Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE với nghiệm gần giá trị 3
  [SHIFT] [CALC] [3] [=]
  Máy tính báo có nghiệm $x=4$
- Để tìm nghiệm tiếp theo ta tiếp tục sử dụng chức năng SHIFT SOLVE, **tuy nhiên câu hỏi được đặt ra là làm thế nào máy tính không lặp lại giá trị nghiệm** $x=4$ **vừa tìm được** ?
  +) Để trả lời câu hỏi này ta phải triệt tiêu nghiệm $x=4$ ở phương trình $f(x)=0$ đi bằng cách thực hiện 1 phép chia $\dfrac{f(x)}{x-4}$
  +) Sau đó tiếp tục SHIFT SOLVE với biểu thức $\dfrac{f(x)}{x-4}$ để tìm nghiệm tiếp theo.
  +) Quá trình này liên tục đến khi nào máy tính báo hết nghiệm thì thôi.

Tổng hợp phương pháp
Bước 1: *Chuyển PT về dạng Vế trái = 0*
Bước 2: *Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE dò nghiệm*
Bước 3: *Khử nghiệm đã tìm được và tiếp tục sử dụng SHIFT SOLVE để dò nghiệm*

2) VÍ DỤ MINH HỌA

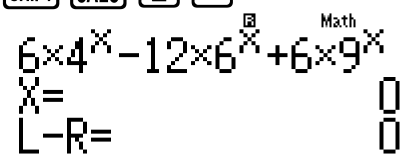
VD1-[THPT Phạm Hồng Thái – Hà Nội 2017]
Số nghiệm của phương trình $6.4^x-12.6^x+6.9^x=0$ là ;
A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**
- Nhập vế trái của phương trình $6.4^x-12.6^x+6.9^x=0$ vào máy tính Casio :
  [6] [×] [4] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [2] [×] [6] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [+] [6] [×] [9] [x■] [ALPHA] [)]



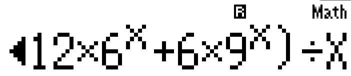
- Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE để tìm được nghiệm thứ nhất :
  [SHIFT] [CALC] [2] [=]



Ta thu được nghiệm thứ nhất $x=0$

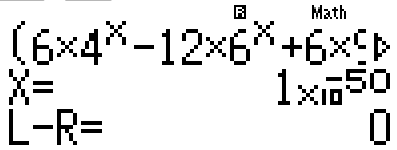
- Để nghiệm $x=0$ không xuất hiện ở lần dò nghiệm SHIFT SOLVE tiếp theo ta chia phương trình $F\left(X\right)$ cho nhân tử x





Tiếp tục SHIFT SOLVE lần thứ hai :





10^{-50} ta hiểu là 0 (do cách làm tròn của máy tính Casio) Có nghĩa là máy tính không thấy nghiệm nào ngoài nghiệm $x=0$ nữa $\Rightarrow$ Phương trình chỉ có nghiệm duy nhất.

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD2: Số nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x}=\frac{3}{2}$ (1) là :

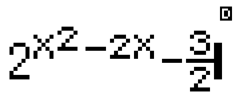
A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 4

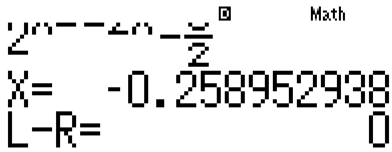
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Chuyển bất phương trình (1) về dạng : $2^{x^2-2x}-\frac{3}{2}=0$
- Nhập vế trái của phương trình $2^{x^2-2x}-\frac{3}{2}=0$ vào máy tính Casio rồi nhất = để lưu vế trái vào máy tính . Dò nghiệm lần thứ nhất với x gần -1





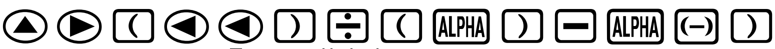


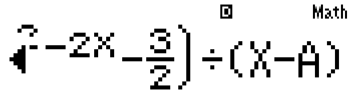
Ta được nghiệm $x=-0.2589...$

- Tiếp theo ta sẽ khử nghiệm $x=-0.2589...$ nhưng nghiệm này lại rất lẻ, vì vậy ta sẽ lưu vào biến A



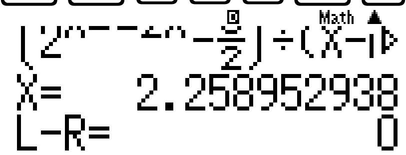
Sau đó gọi lại phương trình và thực hiện phép chia nhân tử $x-A$ để khử nghiệm A



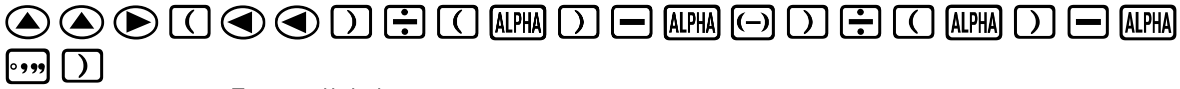


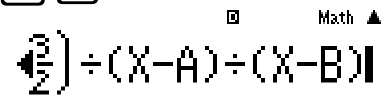
- Tiếp tục SHIFT SOLVE với x gần 1 . Ta được nghiệm thứ hai và lưu vào B





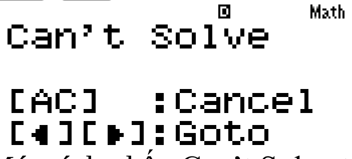
Gọi lại phương trình ban đầu rồi thực hiện phép chia cho nhân tử $x-B$ để khử nghiệm B





Rồi dò nghiệm với x gần 0





Máy tính nhấn Can't Solve tức là không thể dò được nữa (Hết nghiệm)

➢ **Kết luận :** Phương trình (1) có 2 nghiệm $\Rightarrow$ Chọn đáp án **B**

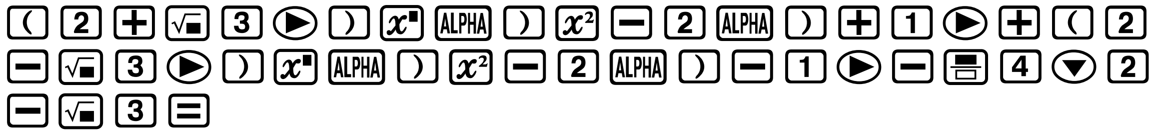
VD3 : Số nghiệm của bất phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$ (1) là :

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Nhập vế trái phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}-\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}=0$ vào máy tính Casio , nhấn nút = để lưu phương trình lại và dò nghiệm thứ nhất.

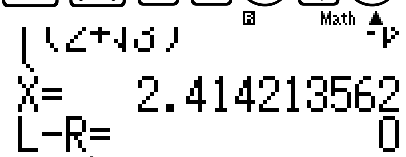






➢ Khử nghiệm $x=1$ rồi dò nghiệm thứ hai.



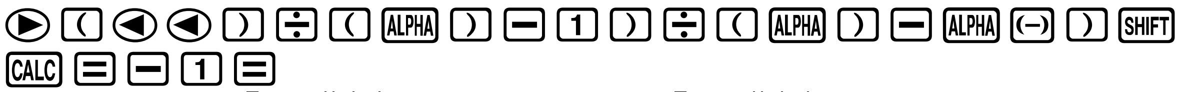


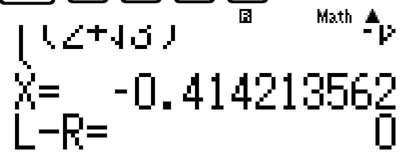
Lưu biến thứ hai này vào A

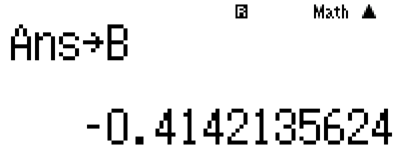




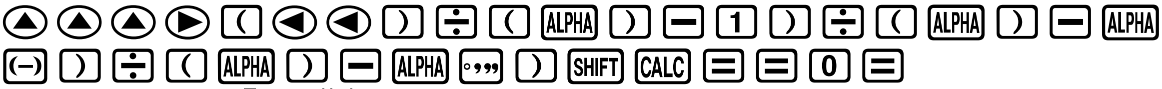
➢ Khử nghiệm $x=1; x=A$ rồi dò nghiệm thứ ba. Lưu nghiệm này vào B

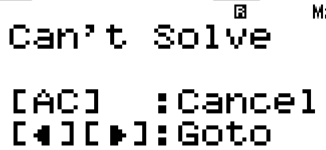






➢ Khử nghiệm $x=1; x=A; x=B$ rồi dò nghiệm thứ tư.





Hết nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình (1) có 3 nghiệm $\Rightarrow$ Chọn đáp án **C**

VD4-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

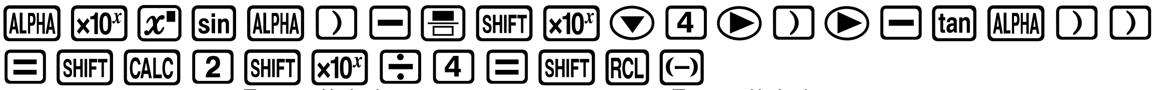
Số nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \tan x$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là :

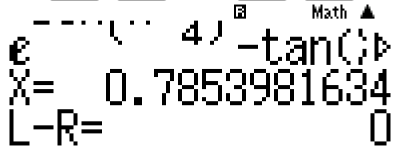
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

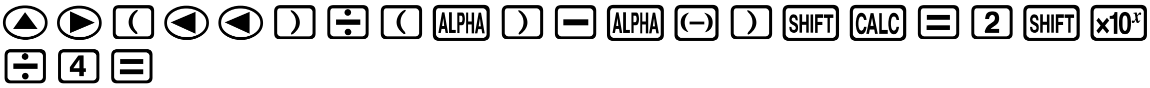
➢ Chuyển phương trình về dạng : $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} - \tan x = 0$. Dò nghiệm thứ nhất rồi lưu vào A

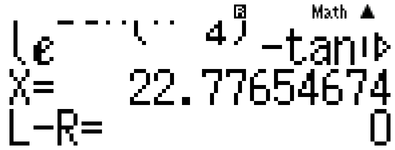






➢ Gọi lại phương trình ban đầu . Khử nghiệm $x = A$ hay $x = \frac{\pi}{4}$ rồi dò nghiệm thứ hai. Lưu nghiệm tìm được vào B





Ra một giá trị nằm ngoài khoảng $[0;2\pi]$. $\Rightarrow$ Ta phải quay lại phương pháp 1 dùng MODE 7 thì mới xử lý được. Vậy ta có kinh nghiệm khi đề bài yêu cầu tìm nghiệm trên miền $[\alpha;\beta]$ thì ta chọn phương pháp lập bảng giá trị MODE 7

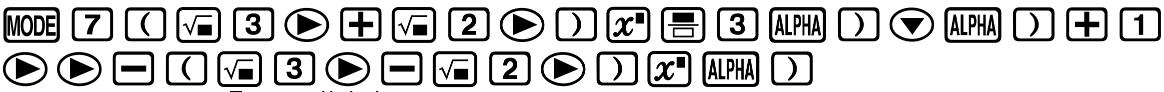
VD5-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017] Phương trình $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3x}{x-1}} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x}$ có số nghiệm âm là :

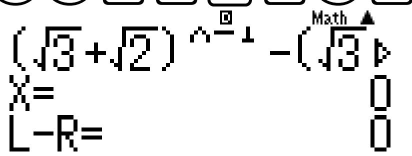
A. 2 nghiệm **B.** 3 nghiệm **C.** 1 nghiệm **D.** Không có

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Nhập vế trái phương trình : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3x}{x-1}} - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x} = 0$, lưu phương trình, dò nghiệm thứ nhất.





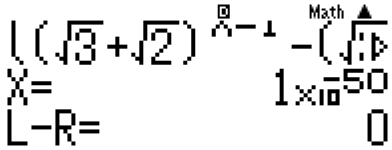
➢ Gọi lại phương trình, khử nghiệm $x = 0$ rồi dò nghiệm thứ hai. Lưu nghiệm này vào biến A





➢ Khử hai nghiệm $x=0; x=A$ rồi dò nghiệm thứ ba.





Ta hiểu $10^{-50}=0$ tức là máy tính không dò thêm được nghiệm nào khác 0

$\Rightarrow$ Phương trình chỉ có 1 nghiệm âm $x=-2$ (nghiệm $x=0$ không thỏa) $\Rightarrow$ Ta chọn đáp án **C**

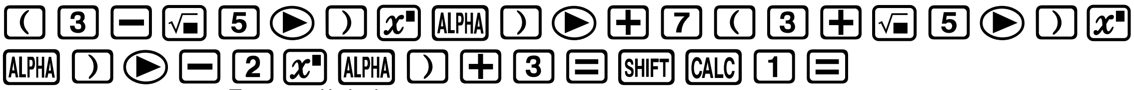
VD6-[THPT Yến Thế - Bắc Giang 2017] Số nghiệm của phương trình $\left(3-\sqrt{5}\right)^x+7\left(3+\sqrt{5}\right)^x=2^{x+3}$ là :

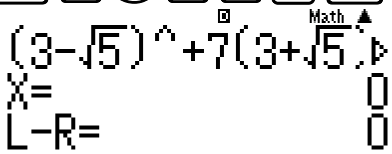
A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 1

GIẢI

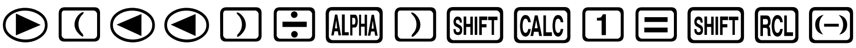
❖ **Cách 1 : CASIO**

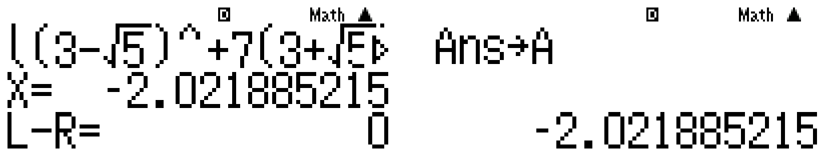
➢ Nhập vế trái phương trình : $\left(3-\sqrt{5}\right)^x+7\left(3+\sqrt{5}\right)^x-2^{x+3}=0$ vào máy tính Casio, lưu phương trình, dò nghiệm thứ nhất . Ta thu được nghiệm $x=0$



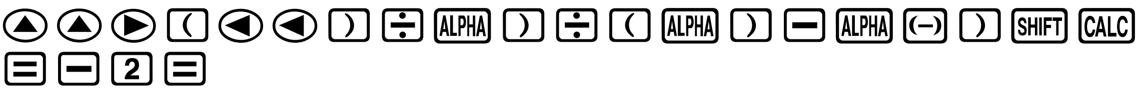


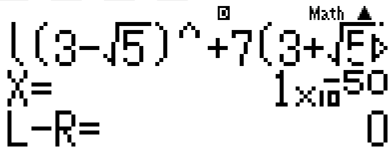
➢ Khử nghiệm $x=0$ rồi tiếp tục dò nghiệm thứ hai. Lưu nghiệm thứ hai vào A





➢ Gọi lại phương trình, khử nghiệm $x=0; x=A$ rồi dò nghiệm thứ ba.





Không có nghiệm thứ ba $\Rightarrow$ Ta chọn đáp án **A**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Số nghiệm của phương trình $\log\left(x-1\right)^2=\sqrt{2}$ là :

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Một số khác

Bài 2-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]

Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1\right]=0$ là :

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Bài 3-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017] Phương trình $3^{x^2-2x-3}+3^{x^2-3x+2}=3^{2x^2-5x-1}+1$

A. Có ba nghiệm thực phân biệt **B.** Vô nghiệm

C. Có hai nghiệm thực phân biệt **D.** Có bốn nghiệm thực phân biệt

Bài 4-[THPT HN Amsterdam 2017] Tìm số nghiệm của phương trình $2^{\frac{1}{x}}+2^{\sqrt{x}}=3$:

A. 1 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** Không có nghiệm

Bài 5-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017]

Cho phương trình $2\log_2 x+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x-2\sqrt{x}+2\right)$. Số nghiệm của phương trình là ;

A. 2 nghiệm **B.** Vô số nghiệm **C.** 1 nghiệm **D.** Vô nghiệm

Bài 6-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]

Tìm số nghiệm của phương trình $\log(x-2)^2=2\log x+\log_{\sqrt{10}}(x+4)$

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

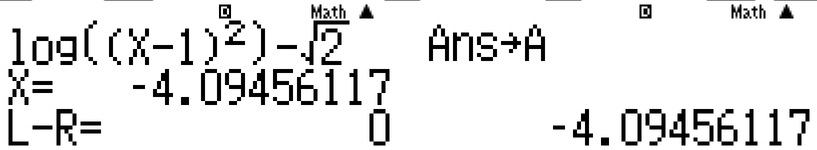
Bài 1-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Số nghiệm của phương trình $\log(x-1)^2=\sqrt{2}$ là :

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Một số khác

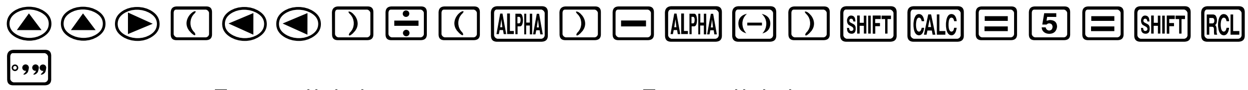
GIẢI

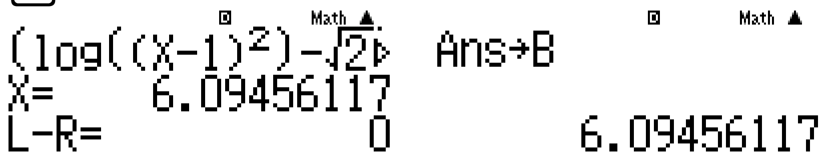
- Dò nghiệm thứ nhất của phương trình $\log(x-1)^2-\sqrt{2}=0$ rồi lưu vào biến A



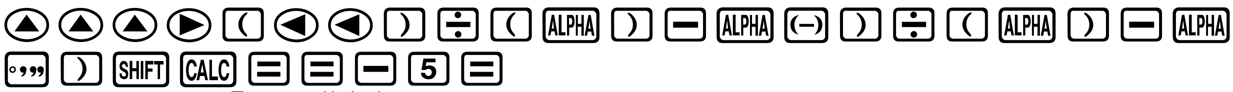


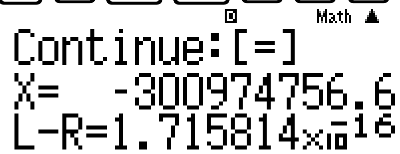
- Khử nghiệm thứ nhất $x=A$ rồi dò nghiệm thứ hai. Lưu nghiệm thứ hai vào B





- Khử nghiệm $x=A; x=B$ rồi dò nghiệm thứ ba.





Không có nghiệm thứ 3 $\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Bài 2-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017]

Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1\right]=0$ là :

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

GIẢI

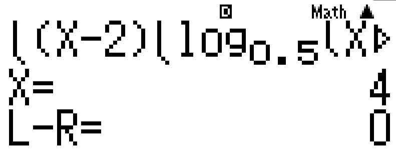
Dò nghiệm thứ nhất của phương trình $(x-2)\left[\log_{0.5}\left(x^2-5x+6\right)+1\right]=0$.

(ALPHA) − 2) (log▫□ 0 . 5 ▶ ALPHA) x^2 − 5 ALPHA) + 6 ▶ + 1) = SHIFT CALC 2 . 5 =



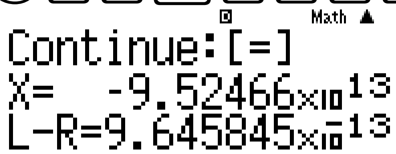
Ta được nghiệm thứ nhất $x=1$. Khử nghiệm này và tiến hành dò nghiệm thứ hai .

▶ (◀ ◀) ÷ (ALPHA) − 1) SHIFT CALC 5 =



Ta được thêm nghiệm thứ hai $x=4$. Khử hai nghiệm $x=1; x=4$ và tiến hành dò nghiệm thứ ba .

◀ ÷ (ALPHA) − 4) SHIFT CALC − 1 =



Không có nghiệm thứ ba ⇒ Đáp số chính xác là **D**

Bài 3-[THPT Lục Ngạn - Bắc Giang 2017] Phương trình $3^{x^2-2x-3}+3^{x^2-3x+2}=3^{2x^2-5x-1}+1$

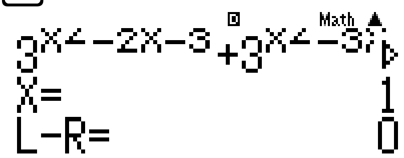
A. Có ba nghiệm thực phân biệt **B.** Vô nghiệm

C. Có hai nghiệm thực phân biệt **D.** Có bốn nghiệm thực phân biệt

GIẢI

- Dò nghiệm thứ nhất của phương trình $3^{x^2-2x-3}+3^{x^2-3x+2}-3^{2x^2-5x-1}-1=0$

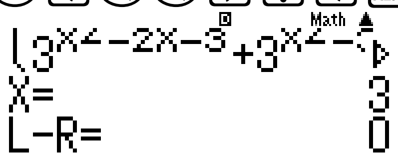
3 $x^{■}$ ALPHA) x^2 − 2 ALPHA) − 3 ▶ + 3 $x^{■}$ ALPHA) x^2 − 3 ALPHA) + 2 ▶ − 3 $x^{■}$ 2 ALPHA) x^2 − 5 ALPHA) − 1 ▶ − 1 = SHIFT CALC 1 =



Ta thấy có 1 nghiệm $x=1$

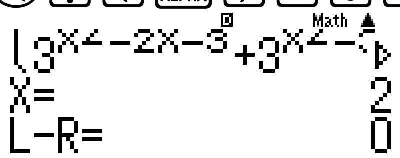
- Khử nghiệm $x=1$ rồi tiếp tục dò nghiệm thứ hai

▶ (◀ ◀) ÷ (ALPHA) − 1) SHIFT CALC 5 =



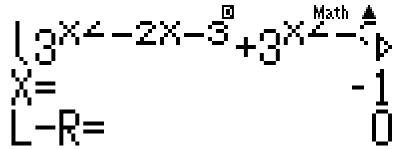
- Ta thu được nghiệm $x=3$. Khử hai nghiệm trên rồi tiếp tục dò nghiệm thứ ba

◀ ÷ (ALPHA) − 3) SHIFT CALC 5 =



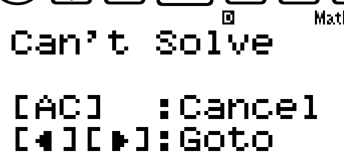
- Ta thu được nghiệm $x=2$. Khử ba nghiệm trên rồi tiếp tục dò nghiệm thứ tư

◀ ÷ (ALPHA) − 2) SHIFT CALC − 1 =



- Ta thu được nghiệm $x=-1$. Khử bốn nghiệm trên rồi tiếp tục dò nghiệm thứ năm

◀ ÷ (ALPHA) + 1) SHIFT CALC − 3 =



Không có nghiệm thứ năm $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

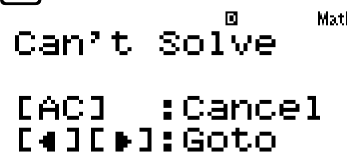
Bài 4-[THPT HN Amsterdam 2017] Tìm số nghiệm của phương trình $2^{\frac{1}{x}}+2^{\sqrt{x}}=3$:

A. 1 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** Không có nghiệm

GIẢI

- Dò nghiệm thứ nhất của phương trình $\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}}+2^{\sqrt{x}}-3=0$ (điều kiện $x\ge 0$).

2 x■ ▭/▭ 1 ▼ ALPHA) ▶ ▶ + 2 x■ √■ ALPHA) ▶ ▶ − 3 SHIFT CALC 1 =



Thấy ngay phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

Bài 5-[THPT Nhân Chính – Hà Nội 2017]

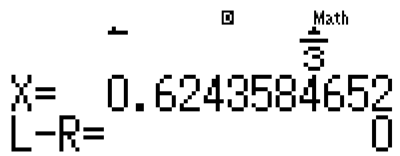
Cho phương trình $2\log_2 x+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x-2\sqrt{x}+2\right)$. Số nghiệm của phương trình là ;

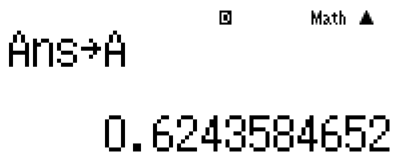
A. 2 nghiệm **B.** Vô số nghiệm **C.** 1 nghiệm **D.** Vô nghiệm

GIẢI

- Dò nghiệm thứ nhất của phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2 x+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x-2\sqrt{x}+2\right)=0$ ($x>0$). Lưu nghiệm thứ nhất vào A

2 log■▭ 2 ▶ ALPHA) ▶ + log■▭ ▭/▭ 1 ▼ 3 ▶ ▶ 1 − √■ ALPHA) ▶ ▶ − ▭/▭ 1 ▼ 2 ▶ log■▭ √■ 2 ▶ ▶ ALPHA) − 2 √■ ALPHA) ▶ + 2 = SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL (−)





- Khử nghiệm $x=A$ rồi dò nghiệm thứ hai

◀ ◀) ÷ (ALPHA) − ALPHA (−)) SHIFT CALC = 3 =



Không có nghiệm thứ hai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

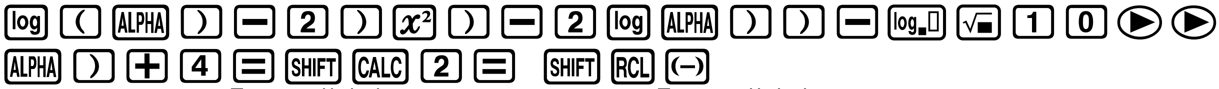
Bài 6-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]

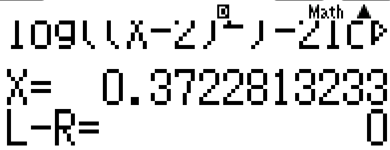
Tìm số nghiệm của phương trình $\log(x-2)^2 = 2\log x + \log_{\sqrt{10}}(x+4)$

A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

GIẢI

- Dò nghiệm thứu nhất của phương trình $\log(x-2)^2 - 2\log x - \log_{\sqrt{10}}(x+4) = 0 \quad (x>0)$. Lưu nghiệm này vào A

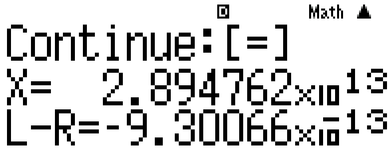






- Khử nghiệm $x = A$ và tiếp tục dò nghiệm thứ hai :





Không có nghiệm thứ hai $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 12. GIẢI NHANH BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT (P1).

1) PHƯƠNG PHÁP 1: CALC THEO CHIỀU THUẬN

Bước 1: Chuyển bài toán bất phương trình về bài toán xét dấu bằng cách chuyển hết các số hạng về vế trái. Khi đó bất phương trình sẽ có dạng Vế trái ≥ 0 hoặc Vế trái ≤ 0

Bước 2: Sử dụng chức năng CALC của máy tính Casio để xét dấu các khoảng nghiệm từ đó rút ra đáp số đúng nhất của bài toán .

CALC THUẬN có nội dung : Nếu bất phương trình có nghiệm tập nghiệm là khoảng $(a;b)$ thì bất phương trình đúng với mọi giá trị thuộc khoảng $(a;b)$

Chú ý: Nếu khoảng $(a;b)$ và (c,d) cùng thỏa mãn mà $(a,b)\subset(c,d)$ thì (c,d) là đáp án chính xác

Ví dụ minh họa

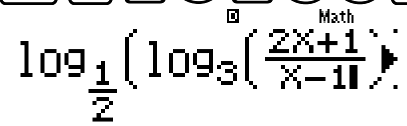
VD1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{2x+1}{x-1}\right)>0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $(-2;1)\cup(1;4)$ **D.** $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

GIẢI

- ❖ **Cách 1 : CASIO**
  - ➢ Nhập vế trái vào máy tính Casio

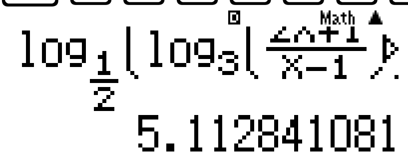




  - ➢ Kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **A**

+) CALC với giá trị cận trên $X=-2-0.1$ ta được

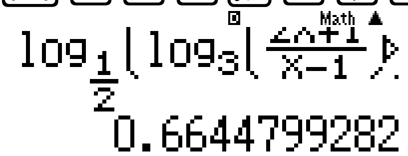




Đây là 1 giá trị dương vậy cận trên thỏa

+) CALC với giá trị cận dưới $X=-10^5$





Đây là 1 giá trị dương vậy cận dưới thỏa

Tới đây ta kết luận đáp án **A** đúng

  - ➢ Tương tự như vậy ta kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **B** thì ta thấy **B** cũng đúng
  - ➢ **A** đúng **B** đúng vậy **A**$\cup$ **B** là đúng nhất và **D** là đáp án chính xác

- ❖ **Cách tham khảo : Tự luận**
  - ▪ Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{2x+1}{x-1}\right)>\log_{\frac{1}{2}}1$ (1)

- Vì cơ số $\frac{1}{2}$ thuộc $(0;1)$ nên $(1) \Leftrightarrow \log_3\frac{2x+1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \log_3\frac{2x+1}{x-1} < \log_3 3$ (2)
- Vì cơ số $3>1$ nên (2) $\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} < 3 \Leftrightarrow 3-\frac{2x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<1 \end{array}\right.$
- Xét điều kiện tồn tại $\begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} > 0 \\ \log_3\frac{2x+1}{x-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} > 0 \\ \log_3\frac{2x+1}{x-1} > \log_3 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-2 \end{array}\right.$
- Kết hợp đáp số $\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<1 \end{array}\right.$ và điều kiện $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-2 \end{array}\right.$ ta được $\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-2 \end{array}\right.$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Ngay ví dụ 1 đã cho chúng ta thấy sức mạnh của Casio đối với dạng bài bất phương trình. Nếu tự luận làm nhanh mất 2 phút thì làm Casio chỉ mất 30 giây
- Trong tự luận nhiều bạn thường hay sai lầm ở chỗ là làm ra đáp số $\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<1 \end{array}\right.$ là dừng lại mà quên mất việc phải kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-2 \end{array}\right.$
- Cách Casio thì các bạn chú ý Đáp án **A** đúng , đáp án **B** đúng thì đáp án hợp của chúng là đáp án **D** mới là đáp án chính xác của bài toán.

<u>VD2</u>-[Chuyên Thái Bình 2017] Giải bất phương trình $2^{x^2-4} \ge 5^{x-2}$:

A. $x\in(-\infty;-2)\cup(\log_2 5;+\infty)$ **B.** $x\in(-\infty;-2]\cup(\log_2 5;+\infty)$

C. $x\in(-\infty;\log_2 5-2)\cup(2;+\infty)$ **D.** $x\in(-\infty;\log_2 5-2]\cup[2;+\infty)$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➢ Chuyển bất phương trình về bài toán xét dấu $2^{x^2-4}-5^{x-2} \ge 0$

➢ Vì bất phương trình có dấu = nên chúng ta chỉ chọn đáp án chứa dấu = do đó **A** và **C** loại

➢ Nhập vế trái vào máy tính Casio

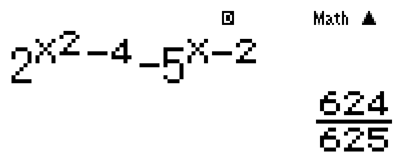




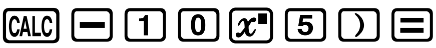
➢ Kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **B** và **D**

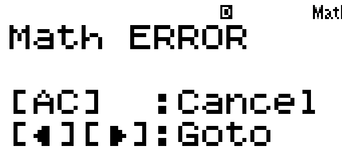
+)CALC với giá trị cận trên $X=-2$ ta được





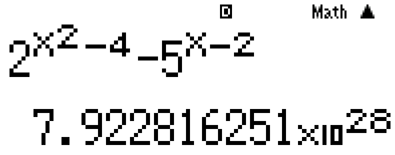
+)CALC với giá trị cận dưới $X=-10^5$





Số -10^5 là số quá nhỏ để máy tính Casio làm việc được vậy ta chọn lại cận dưới $X=-10$

◄ CALC − 1 0 =

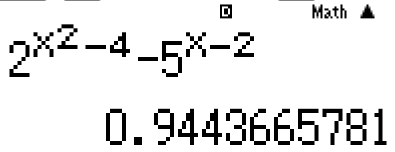


Đây cũng là một giá trị dương vậy đáp án nửa khoảng $(-\infty;-2]$ nhận

➢ Đi kiểm tra xem khoảng tương ứng $(-\infty;\log_2 5-2]$ ở đáp án D xem có đúng không, nếu sai thì chỉ có B là đúng

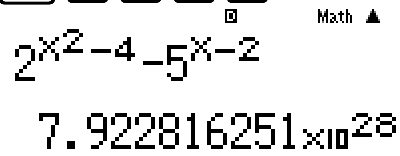
+) CALC với giá trị cận dưới $X=\log_2 5-2$

CALC ln 5) ÷ ln 2) =



+) CALC với cận trên $X=10$

CALC − 1 0 =



Đây cũng là 2 giá trị dương vậy nửa khoảng $(-\infty;\log_2 5-2]$ nhận

➢ Vì nửa khoảng $(-\infty;\log_2 5-2]$ chứa nửa khoảng $(-\infty;-2]$ vậy đáp án D là đáp án đúng nhất

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Logarit hóa 2 vế theo cơ số 2 ta được $\log_2\left(2^{x^2-4}\right)\ge\log_2\left(5^{x-2}\right)\Leftrightarrow x^2-4\ge(x-2)\log_2 5$

$$\Leftrightarrow(x-2)(x+2-\log_2 5)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le\log_2 5-2\end{array}\right.$$

- Vậy ta chọn đáp án **D**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán này lại thể hiện nhược điểm của Casio là bấm máy sẽ mất tầm 1.5 phút so với 30 giây của tự luận. Các e tham khảo và rút cho mình kinh nghiệm khi nào thì làm tự luận khi nào thì làm theo cách Casio
- Các tự luận tác giả dùng phương pháp **Logarit hóa 2 vế** vì trong bài toán xuất hiện đặc điểm “ **có 2 cơ số khác nhau và số mũ có nhân tử chung**” các bạn lưu ý điều này

VD3-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017]

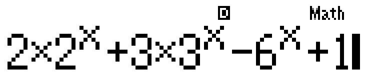
Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2.2^x+3.3^x-6^x+1>0$:

A. $S=(2;+\infty)$ **B.** $S=(0;2)$ **C.** $S=R$ **D.** $(-\infty;2)$

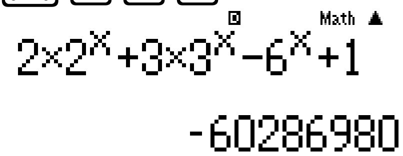
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

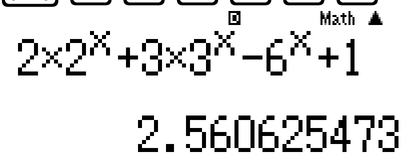
- Nhập vế trái vào máy tính Casio
  [2] [×] [2] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [3] [×] [3] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▶] [−] [6] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [1]



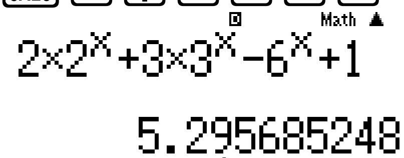
- Kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **A**
  +) CALC với giá trị cận trên $X = 10$ ta được
  [CALC] [1] [0] [=]



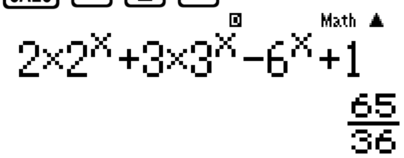
  Đây là 1 giá trị âm vậy đáp án **A** loại dẫn đến **C** sai
- Tương tự như vậy ta kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **B**
  +) CALC với giá trị cận trên $X = 2 - 0.1$
  [CALC] [2] [−] [0] [.] [1] [=]



  +) CALC với giá trị cận dưới $X = 0 + 0.1$
  [CALC] [0] [+] [0] [.] [1] [=]



  Cả 2 giá trị này đều dương vậy đáp án **B** đúng
- Vì D chứa B nên để xem đáp án nào đúng nhất thì ta chọn 1 giá trị thuộc **D** mà không **B**
  +) CALC với giá trị $X = -2$
  [CALC] [−] [2] [=]



  Giá trị này cũng nhận vậy **D** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Bất phương trình $\Leftrightarrow\ 2.2^x + 3.3^x + 1 > 6^x \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{6}\right)^x + 3.\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 1$

  $\Leftrightarrow 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 1$ (1)

- Đặt $f(x) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x$ khi đó (1) $\Leftrightarrow f(x) > f(2)$ (2)

- Ta có $f'(x) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^x \ln\left(\frac{1}{6}\right) < 0$ với mọi x

  $\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên R

- Khi đó (2) $\Leftrightarrow x < 2$

❖ **Bình luận :**

- Tiếp tục nhắc nhở các bạn tính chất quan trọng của bất phương trình : **B** là đáp án đúng nhưng **D** mới là đáp án chính xác (đúng nhất)
- Phần tự luận tác giả dùng **phương pháp hàm số** với dấu hiệu "**Một bất phương trình có 3 số hạng với 3 cơ số khác nhau**"
- Nội dng của phương pháp hàm số như sau : Cho một bất phương trình dạng $f(u) > f(v)$ trên miền $[a;b]$ nếu hàm đại diện $f(t)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $u > v$ còn hàm đại diện luôn nghịch biến trên $[a;b]$ thì $u < v$

2) Phương pháp 2 : CALC theo chiều nghịch

Bước 1: Chuyển bài toán bất phương trình về bài toán xét dấu bằng cách chuyển hết các số hạng về vế trái. Khi đó bất phương trình sẽ có dạng Vế trái ≥ 0 hoặc Vế trái ≤ 0

Bước 2: Sử dụng chức năng CALC của máy tính Casio để xét dấu các khoảng nghiệm từ đó rút ra đáp số đúng nhất của bài toán .

CALC NGHỊCH có nội dung : Nếu bất phương trình có nghiệm tập nghiệm là khoảng $(a;b)$ thì bất phương trình sai với mọi giá trị không thuộc khoảng $(a;b)$

Ví dụ minh họa

VD1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\dfrac{2x+1}{x-1}\right) > 0$ có tập nghiệm là :

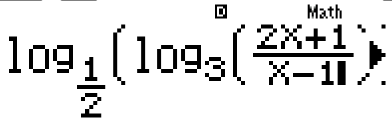
A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $(-2;1)\cup(1;4)$ **D.** $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Nhập vế trái vào máy tính Casio





➢ Kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **A**

+) CALC với giá trị ngoài cận trên $X = -2 + 0.1$ ta được





Vậy lân cận phải của -2 là vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **A** đúng và đáp án **C** sai

➢ Kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **B**

+) CALC với giá trị ngoài cận trên $X = 4 - 0.1$ ta được





Đây là giá trị âm. Vậy lân cận tráii của 4 là vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **B** đúng và đáp án **C** sai

➢ Đáp án **A** đúng **B** đúng vậy ta chọn hợp của 2 đáp án là đáp án **D** chính xác.

VD2-[Chuyên Thái Bình 2017] Giải bất phương trình $2^{x^2-4} \geq 5^{x-2}$:

A. $x \in (-\infty;-2)\cup(\log_2 5;+\infty)$ **B.** $x \in (-\infty;-2]\cup(\log_2 5;+\infty)$

C. $x \in (-\infty; \log_2 5 - 2) \cup (2; +\infty)$ **D.** $x \in (-\infty; \log_2 5 - 2] \cup [2; +\infty)$

GIẢI

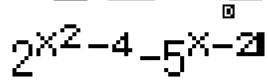
❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➢ Chuyển bất phương trình về bài toán xét dấu $2^{x^2-4} - 5^{x-2} \geq 0$

➢ Vì bất phương trình có dấu = nên chúng ta chỉ chọn đáp án chứa dấu = do đó **A** và **C** loại

➢ Nhập vế trái vào máy tính Casio

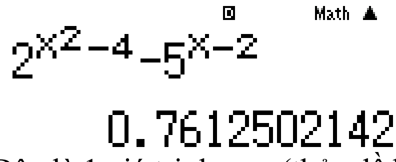




➢ Kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **B**

+)CALC với giá trị ngoài cận trên -2 là $X = -2 + 0.1$ ta được





Đây là 1 giá trị dương (thỏa đề bài) mà đáp án B không chứa $X = -2 + 0.1 \Rightarrow$ Đáp án **B** sai

➢ Đáp án **A**, **C**, **B** đều sai vậy không cần thử thêm cũng biết đáp án **D** chính xác

<u>VD3</u>-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017]

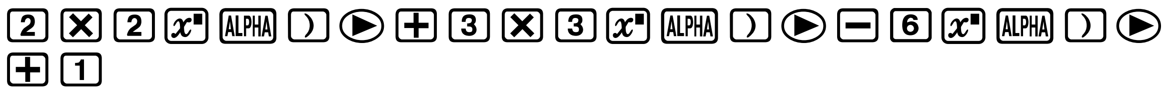
Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2.2^x + 3.3^x - 6^x + 1 > 0$:

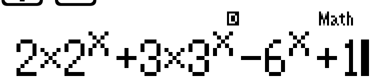
A. $S = (2; +\infty)$ **B.** $S = (0; 2)$ **C.** $S = R$ **D.** $(-\infty; 2)$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➢ Nhập vế trái vào máy tính Casio

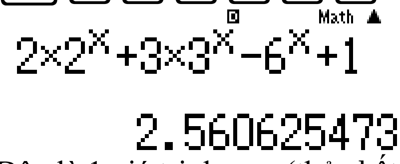




➢ Kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **A**

+) CALC với giá trị ngoài cận dưới 2 ta chọn $X = 2 - 0.1$



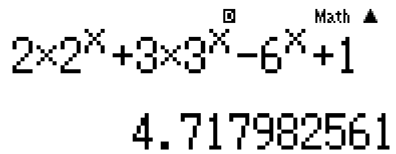


Đây là 1 giá trị dương (thỏa bất phương trình) vậy đáp án **A** sai dẫn đến đáp án **C** sai

➢ Tương tự như vậy ta kiểm tra tính Đúng Sai của đáp án **B**

+) CALC với giá trị ngoài cận dưới 0 ta chọn $X = 0 - 0.1$





Đây là 1 giá trị dương (thỏa bất phương trình) $\Rightarrow$ Đáp án B sai

➢ Đáp án **A**, **C**, **B** đều sai vậy không cần thử thêm cũng biết đáp án **D** chính xác

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Sư phạm Hà Nội lần 1 năm 2017]
Bất phương trình $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$ có tập nghiệm là :

A. $(1;2)\cup(3;+\infty)$ **B.** $(1;2)\cap(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)\cap(2;3)$ **D.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$

Bài 2-[THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội 2017] Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ là :

A. $[1;+\infty)$ **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

Bài 3-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nghiệm của bất phương trình $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)>1$ là :

A. $x>1$ **B.** $x>\sqrt{5}$ **C.** $x>1; x\neq 2$ **D.** $1<x<\sqrt{5}, x\neq 2$

Bài 4-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Giải bất phương trình $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}\leq\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$:

A. $x\leq -2$ **B.** $x\geq 4$ **C.** $-2\leq x\leq 4$ **D.** $x\leq -2$ hoặc $x\geq 4$

Bài 5-[THPT HN Amsterdam 2017] Bất phương trình $2^{x^2}.3^x<1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên :
A. 1 **B.** Vô số **C.** 0 **D.** 2

Bài 6-[Thi thử Báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017] Tập nghiệm của bất phương trình $32.4^x-18.2^x+1<0$ là tập con của tập

A. $(-5;-2)$ **B.** $(-4;0)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(-3;1)$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Sư phạm Hà Nội lần 1 năm 2017]
Bất phương trình $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$ có tập nghiệm là :

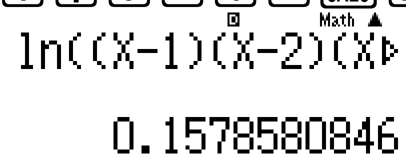
A. $(1;2)\cup(3;+\infty)$ **B.** $(1;2)\cap(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)\cap(2;3)$ **D.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$

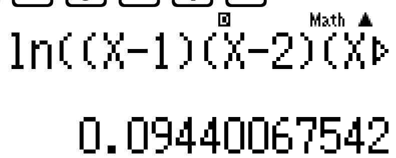
GIẢI

❖ **Casio cách 1**

- Kiểm tra khoảng nghiệm $(1;2)$ với cận dưới $X=1+0.1$ và cận trên $X=2-0.1$

ln (ALPHA) − 1) (ALPHA) − 2) (ALPHA) − 3) + 1) CALC 1 + 0 • 1 = CALC 2 − 0 • 1 =

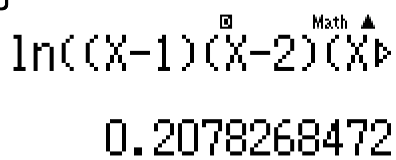


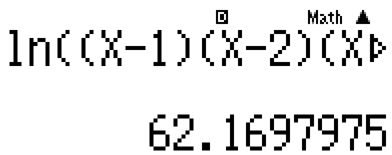


Hai cận đều nhận $\Rightarrow(1;2)$ nhận

- Kiểm tra khoảng nghiệm $(3:+\infty)$ với cận dưới $X=3+0.1$ và cận trên $X=10^9$

▲ ▲ ▶ (◀ ◀) ÷ (ALPHA) − ALPHA (−)) SHIFT CALC = 5 = SHIFT RCL °'''





Hai cận đều nhận $\Rightarrow(3;+\infty)$ nhận

Tóm lại hợp của hai khoảng trên là đúng $\Rightarrow$ **A** là đáp số chính xác

❖ **Casio cách 2**

- Kiểm tra khoảng nghiệm $(1;2)$ với ngoài cận dưới $X=1-0.1$ và ngoài cận trên $X=2+0.1$

ln (ALPHA) − 1) (ALPHA) − 2) (ALPHA) − 3) + 1) CALC 1 + 0 . 1 = CALC 2 − 0 . 1 =

```
ln((X-1)(X-2)(X▸        ln((X-1)(X-2)(X▸
   -0.2626643095           -0.1042500214
```

Hai cận ngoài khoảng $(1;2)$ đều vi phạm $\Rightarrow$ Khoảng $(1;2)$ thỏa

- Kiểm tra khoảng $(3:+\infty)$ với ngoài cận dưới $X=3-0.1$ và trong cận dưới (vì không có cận trên)

CALC 3 − 0 . 1 = CALC 3 + 0 . 1 =

```
ln((X-1)(X-2)(X▸        ln((X-1)(X-2)(X▸
   -0.1875351238            0.2078268472
```

Ngoài cận dưới vi phạm, trong cận dưới thỏa $\Rightarrow$ Khoảng $(3;+\infty)$ nhận

Tóm lại hợp của hai khoảng trên là đúng $\Rightarrow$ **A** là đáp số chính xác

Bài 2-[THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội 2017] Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ là :

A. $[1;+\infty)$ **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

GIẢI

- Điều kiện : $\log_{0.5}(x-1)-1\ge 0$ (trong căn ≥ 0)
- Kiểm tra khoảng nghiệm $[1;+\infty)$ với cận dưới $X=1$ và cận trên 10^9

log■□ 0 . 5 ▶ ALPHA) − 1 ▶ − 1 CALC 1 =

```
Math ERROR

[AC]  :Cancel
[◀][▶]:Goto
```

Cận dưới vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Kiểm tra khoảng nghiệm $\left(1;\frac{3}{2}\right]$ với cận dưới $X=1+0.1$ và cận trên $X=3$

◀ CALC 1 + 0 . 1 = CALC 3 ÷ 2 =

```
log0.5(X-1)-1           log0.5(X-1)-1
     2.321928095                     0
```

Hai cận đều nhận $\Rightarrow\left(1;\frac{3}{2}\right]$ nhận

- Kiểm tra khoảng nghiệm $(1;+\infty)$ với cận trên $X=10^9$ $\Rightarrow$ Cận trên bị vi phạm $\Rightarrow$ **C** sai $\Rightarrow$ **D** sai

CALC 1 0 x■ 9) =

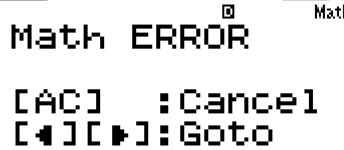
```
log0.5(X-1)-1
   -30.89735285
```

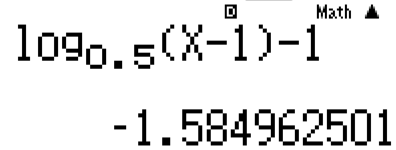
Tóm lại **A** là đáp số chính xác

❖ **Casio cách 2**

- Đáp án A sai luôn vì cận $x=1$ không thỏa mãn điều kiện hàm logarit
- Kiểm tra khoảng nghiệm $\left(1;\frac{3}{2}\right]$ với ngoài cận dưới $X=1-0.1$ và ngoài cận trên $X=\frac{3}{2}+0.1$

log■□ 0 · 5 ▶ ALPHA) − 1 ▶ − 1 CALC 1 − 0 · 1 =





Ngoài hai cận đều vi phạm $\Rightarrow$ $\left(1;\frac{3}{2}\right]$ nhận

Hơn nữa $X=\frac{3}{2}+0.1$ vi phạm $\Rightarrow$ **C** và **D** loại luôn

Bài 3-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nghiệm của bất phương trình $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)>1$ là :

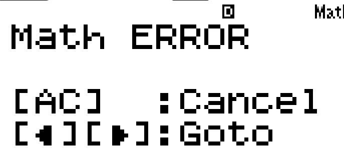
A. $x>1$ **B.** $x>\sqrt{5}$ **C.** $x>1; x\neq 2$ **D.** $1<x<\sqrt{5}, x\neq 2$

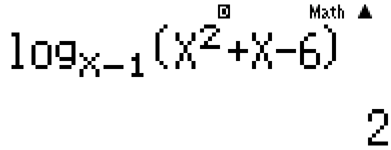
GIẢI

❖ **Casio cách 1**

- Chuyển bất phương trình về dạng xét dấu $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1>0$
- Kiểm tra khoảng nghiệm $x>1$ với cận dưới $X=1+0.1$ và cận trên $X=10^9$

log■□ ALPHA) − 1 ▶ ALPHA) x² + ALPHA) − 6 CALC 1 + 0 · 1 = ◀
CALC 1 0 x■ 9) =



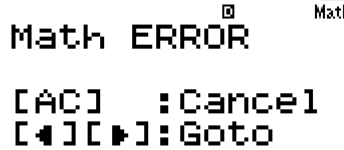


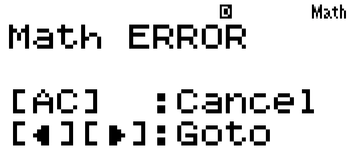
Cận dưới vi phạm $\Rightarrow$ A sai $\Rightarrow$ C và D chứa cận dưới $X=1+01.$ vi phạm nên cũng sai
Tóm lại đáp số chính xác là **B**

❖ **Casio cách 2**

- Kiểm tra khoảng nghiệm $(1;2)$ với ngoài cận dưới $X=1-0.1$ và cận dưới $X=1+0.1$

ln (ALPHA) − 1) (ALPHA) − 2) (ALPHA) − 3) + 1) CALC
1 + 0 · 1 = CALC 2 − 0 · 1 =





Cận dưới $X=1+0.1$ vi phạm nên **A** , **C** , **D** đều sai

Bài 4-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Giải bất phương trình $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}\leq\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$:

A. $x\leq -2$ **B.** $x\geq 4$ **C.** $-2\leq x\leq 4$ **D.** $x\leq -2$ hoặc $x\geq 4$

GIẢI

❖ **Casio cách 1**

- Chuyển bất phương trình về dạng xét dấu $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}\leq 0$
- Kiểm tra khoảng nghiệm $x\leq -2$ với cận dưới $X=-10$ và cận trên $X=-2$

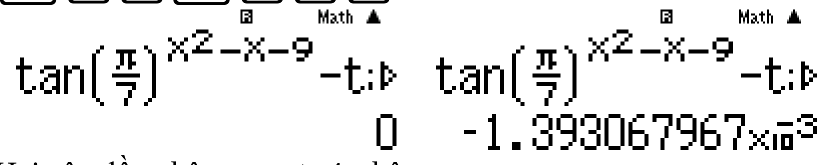
SHIFT MODE 4 tan ▭ SHIFT x10ˣ ▼ 7 ▶) x■ ALPHA) x² − ALPHA) − 9 ▶ −
tan ▭ SHIFT x10ˣ ▼ 7 ▶) x■ ALPHA) − 1 CALC − 1 0 = CALC − 2 =



Hai cận đều nhận $\Rightarrow$ $x \le -2$ nhận $\Rightarrow$ Đáp số chính xác chỉ có thể là **A** hoặc **D**

- Kiểm tra khoảng nghiệm $x \ge 4$ với cận dưới $X = 4$ và cận trên $X = 10$

CALC 4 = CALC 1 0 =



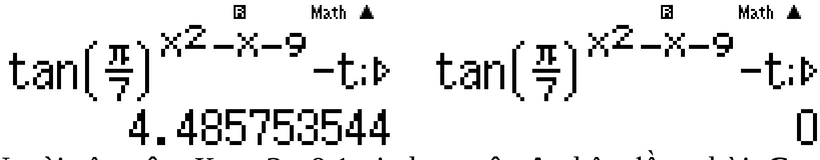
Hai cận đều nhận $\Rightarrow$ $x \ge 4$ nhận

Tóm lại đáp số chính xác là **D**

❖ **Casio cách 2**

- Kiểm tra khoảng nghiệm $x \le -2$ với ngoài cận trên $X = -2 + 0.1$ và cận trên $X = -2$

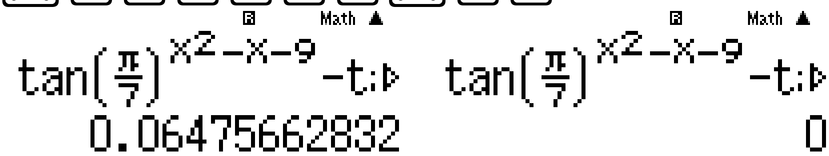
SHIFT MODE 4 tan ▭/▭ SHIFT x10ˣ ▼ 7 ▶) x■ ALPHA) x² − ALPHA) − 9 ▶ − tan ▭/▭ SHIFT x10ˣ ▼ 7 ▶) x■ ALPHA) − 1 CALC − 2 + 0 • 1 = CALC − 2 =



Ngoài cận trên $X = -2 + 0.1$ vi phạm nên **A** nhận đồng thời **C** sai

- Kiểm tra khoảng nghiệm $x \ge 4$ với ngoài cận dưới $X = 4 - 0.1$ và cận dưới $X = 4$

CALC 4 − 0 • 1 = CALC 4 =



Ngoài cận dưới $X = 4 - 0.1$ vi phạm nên **B** nhận đồng thời **C** sai

Tóm lại **A** , **B** đều nhận nên hợp của chúng là **D** là đáp số chính xác

Bài 5-[THPT HN Amsterdam 2017] Bất phương trình $2^{x^2}.3^x < 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên :

A. 1 **B.** Vô số **C.** 0 **D.** 2

(Xem đáp án ở Bài 5 – phần 2 vì phương pháp sau tỏ ra hiệu quả hơn hẳn)

Bài 6-[Thi thử Báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017] Tập nghiệm của bất phương trình $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0$ là tập con của tập

A. $(-5;-2)$ **B.** $(-4;0)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(-3;1)$

(Xem đáp án ở Bài 6 – phần 2 vì phương pháp sau tỏ ra hiệu quả hơn hẳn)

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 13. GIẢI NHANH BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT (P2).

1) PHƯƠNG PHÁP 3: LẬP BẢNG GIÁ TRỊ MODE 7

Bước 1: Chuyển bài toán bất phương trình về bài toán xét dấu bằng cách chuyển hết các số hạng về vế trái. Khi đó bất phương trình sẽ có dạng Vế trái ≥ 0 hoặc Vế trái ≤ 0

Bước 2: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio để xét dấu các khoảng nghiệm từ đó rút ra đáp số đúng nhất của bài toán .

Chú ý: Cần làm nhiều bài toán tự luyện để từ đó rút ra kinh nghiệm thiết lập Start End Step hợp lý

Ví dụ minh họa

VD1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\dfrac{2x+1}{x-1}\right)>0$ có tập nghiệm là :

A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $(-2;1)\cup(1;4)$ **D.** $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

GIẢI

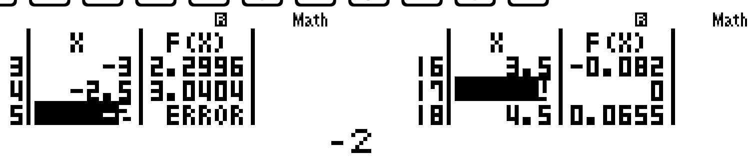
- ❖ **Cách 3 : CASIO**
- ➢ Đăng nhập MODE 7 và nhập vế trái vào máy tính Casio

MODE 7 log□ ▭ 1 ▼ 2 ▶ ▶ log□ 3 ▶ ▭ 2 ALPHA) + 1 ▼ ALPHA) − 1



- ➢ Quan sát các cận của đáp số là $-2;4;1$ nên ta phải thiết lập miền giá trị của X sao cho X chạy qua các giá trị này . Ta thiết lập Start -4 End 5 Step 0.5

= = − 4 = 5 = 0 . 5 =



Quan sát bảng giá trị ta thấy rõ ràng hai khoảng $(-\infty;-2)$ và $(4;+\infty)$ làm cho dấu của vế trái dương. $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD2-[Chuyên Thái Bình 2017] Giải bất phương trình $2^{x^2-4}\ge 5^{x-2}$:

A. $x\in(-\infty;-2)\cup(\log_2 5;+\infty)$ **B.** $x\in(-\infty;-2]\cup(\log_2 5;+\infty)$

C. $x\in(-\infty;\log_2 5-2)\cup(2;+\infty)$ **D.** $x\in(-\infty;\log_2 5-2]\cup[2;+\infty)$

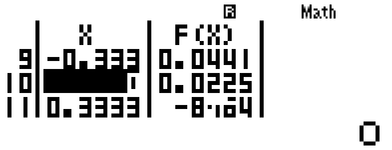
GIẢI

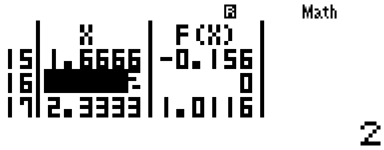
- ❖ **Cách 3 : CASIO**
- ➢ Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{x^2-4}-5^{x-2}\ge 0$.Đăng nhập MODE 7 và nhập vế trái vào máy tính Casio MODE 7 2 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) x^2 − 4 ▶ − 5 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) − 2



- ➢ Quan sát các cận của đáp số là $-2;2;\log_2 5\approx 2.32;\log_2 5-2\approx 0.32$ nên ta phải thiết lập miền giá trị của X sao cho X chạy qua các giá trị này . Ta thiết lập Start -3 End 3 Step $1:3$







Quan sát bảng giá trị ta thấy rõ ràng hai khoảng $\left(-\infty;0.32=\log_2 5\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$ làm cho dấu của vế trái dương. $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

VD3-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017]

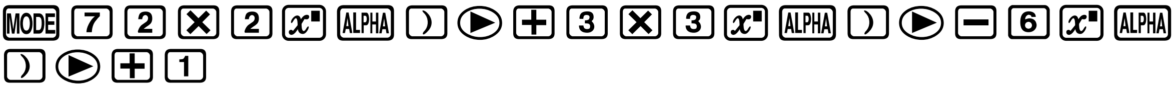
Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2.2^x+3.3^x-6^x+1>0$:

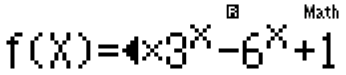
A. $S=\left(2;+\infty\right)$ **B.** $S=\left(0;2\right)$ **C.** $S=R$ **D.** $\left(-\infty;2\right)$

GIẢI

❖ **Cách 3 : CASIO**

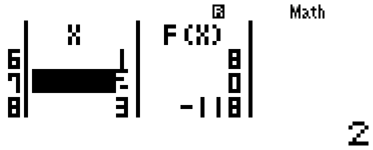
➢ Đăng nhập MODE 7 và nhập vế trái vào máy tính Casio





➢ Quan sát các cận của đáp số là $0;2$ nên ta phải thiết lập miền giá trị của X sao cho X chạy qua các giá trị này . Ta thiết lập Start -4 End 5 Step 1





Quan sát bảng giá trị ta thấy rõ ràng hai khoảng $\left(-\infty;2\right)$ làm cho dấu của vế trái dương. $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

2) PHƯƠNG PHÁP 4 : LƯỢC ĐỒ CON RẮN

Bước 1: Chuyển bài toán bất phương trình về bài toán xét dấu bằng cách chuyển hết các số hạng về vế trái. Khi đó bất phương trình sẽ có dạng Vế trái ≥ 0 hoặc Vế trái ≤ 0

Bước 2: Sử dụng CALC tìm các giá trị tới hạn của (làm cho vế trái = 0 hoặc không xác định) . Dấu của bất phương trình có trong các khoảng tới hạn là không đổi. Dùng CALC lấy một giá trị đại diện để xét dấu.

Chú ý : Qua 4 phương pháp ta mới thấy trong tự luận thì lược đồ con rắn là lợi hại nhất nhưng trong khi thi trắc nghiệm thì lại tỏ ra yếu thế vì khó dùng và khá dài dòng

Ví dụ minh họa

VD1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{2x+1}{x-1}\right)>0$ có tập nghiệm là :

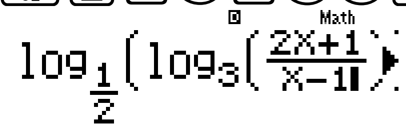
A. $\left(-\infty;-2\right)$ **B.** $\left(4;+\infty\right)$ **C.** $\left(-2;1\right)\cup\left(1;4\right)$ **D.** $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(4;+\infty\right)$

GIẢI

❖ **Cách 4 : CASIO**

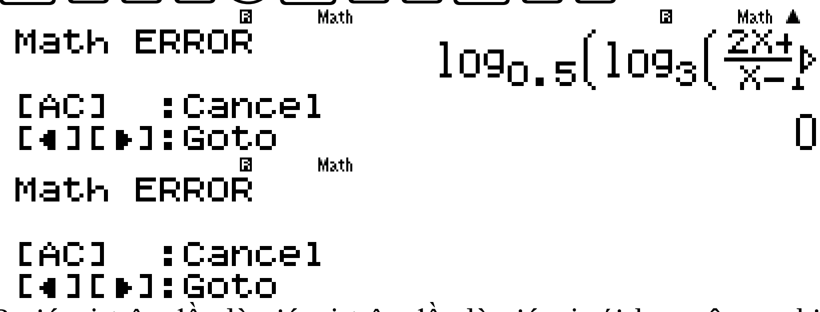
➢ Đề bài xuất hiện các giá trị $-2;4;1$ ta CALC với các giá tri này để tìm giá trị tới hạn





➢ Lần lượt CALC với cá giá trị $-2;4;1$

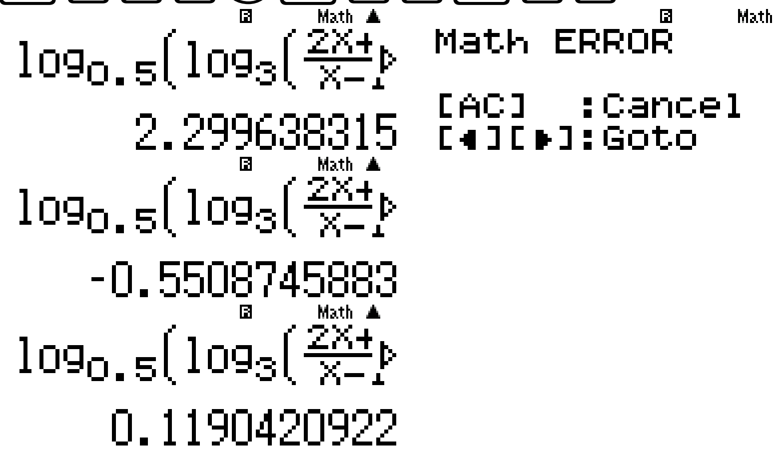
CALC − 2 = ◀ CALC 4 = CALC 1 =



3 giá trị trên đều là giá trị trên đều là giá trị tới hạn nên ta chia thành các khoảng nghiệm $(-\infty;-2);(-2;1);(1;4);(4;+\infty)$

➢ CALC với các giá trị đại diện cho 4 khoảng để lấy dấu là : $-3;0;2;5$

CALC − 2 = ◀ CALC 4 = CALC 1 =



Rõ ràng khoảng nghiệm thứ nhất và thứ tư thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD2-[Chuyên Thái Bình 2017] Giải bất phương trình $2^{x^2-4}\geq 5^{x-2}$:

A. $x\in(-\infty;-2)\cup(\log_2 5;+\infty)$ **B.** $x\in(-\infty;-2]\cup(\log_2 5;+\infty)$

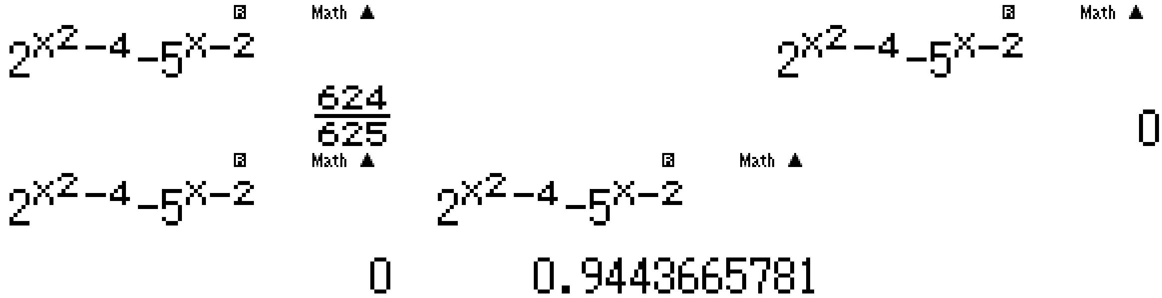
C. $x\in(-\infty;\log_2 5-2)\cup(2;+\infty)$ **D.** $x\in(-\infty;\log_2 5-2]\cup[2;+\infty)$

GIẢI

❖ **Cách 4 : CASIO**

➢ Đề bài xuất hiện các giá trị $-2;\log_2 5-2;2;\log_2 5\approx 2.32$ ta CALC với các giá tri này để tìm giá trị tới hạn

2 $x^■$ ALPHA) x^2 − 4 ▶ − 5 $x^■$ ALPHA) − 2 CALC − 2 = CALC log■□ 5) ÷ log 2) − 2 = CALC 2 = CALC log 5) ÷ log 2) =



Ta thu được hai giá trị tới hạn $\log_2 5-2$ và 2 $\Rightarrow$ Đáp số chỉ có thể là **C** hoặc **D**

➢ Vì bất phương trình có dấu = nên ta lấy hai cận $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD3-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017]

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2.2^x+3.3^x-6^x+1>0$:

A. $S=(2;+\infty)$ **B.** $S=(0;2)$ **C.** $S=R$ **D.** $(-\infty;2)$

GIẢI

❖ **Cách 4 : CASIO**

➢ Đề bài xuất hiện các giá trị $0;2$ ta CALC với các giá tri này để tìm giá trị tới hạn

2 × 2 x■ ALPHA) ▶ + 3 × 3 x■ ALPHA) ▶ − 6 x■ ALPHA) ▶ + 1 CALC 0 = CALC 2 =

$2\times2^X+3\times3^X-6^X+1$ → 5 $2\times2^X+3\times3^X-6^X+1$ → 0

Ta thu được 1 giá trị tới hạn $x=2$ $\Rightarrow$ Đáp số đúng là **A** hoặc **D**

➢ CALC với các giá trị đại diện cho 2 khoảng để lấy dấu là : $1;3$

CALC − 2 = ◀ CALC 4 = CALC 1 =

$2\times2^X+3\times3^X-6^X+1$ → 8 $2\times2^X+3\times3^X-6^X+1$ → -118

Ta cần lấy dấu dương $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Sư phạm Hà Nội lần 1 năm 2017]

Bất phương trình $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$ có tập nghiệm là :

A. $(1;2)\cup(3;+\infty)$ **B.** $(1;2)\cap(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)\cap(2;3)$ **D.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$

Bài 2-[THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội 2017] Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ là :

A. $[1;+\infty)$ **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

Bài 3-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nghiệm của bất phương trình $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)>1$ là :

A. $x>1$ **B.** $x>\sqrt{5}$ **C.** $x>1; x\neq 2$ **D.** $1<x<\sqrt{5}, x\neq 2$

Bài 4-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Giải bất phương trình $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}\le\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$:

A. $x\le-2$ **B.** $x\ge4$ **C.** $-2\le x\le4$ **D.** $x\le-2$ hoặc $x\ge4$

Bài 5-[THPT HN Amsterdam 2017] Bất phương trình $2^{x^2}.3^x<1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên :

A. 1 **B.** Vô số **C.** 0 **D.** 2

Bài 6-[Thi thử Báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017] Tập nghiệm của bất phương trình $32.4^x-18.2^x+1<0$ là tập con của tập

A. $(-5;-2)$ **B.** $(-4;0)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(-3;1)$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Sư phạm Hà Nội lần 1 năm 2017]

Bất phương trình $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$ có tập nghiệm là :

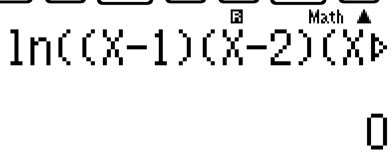
A. $(1;2)\cup(3;+\infty)$ **B.** $(1;2)\cap(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)\cap(2;3)$ **D.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$

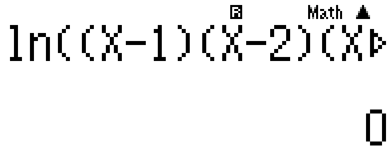
GIẢI

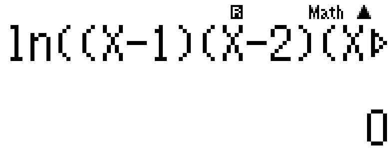
❖ **Casio cách 4**

- Kiểm tra các giá trị $1;2;3$

[ln] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [(] [ALPHA] [)] [−] [3] [)] [+] [1] [)] [CALC] [1] [=] [CALC] [2] [=] [CALC] [3] [=]



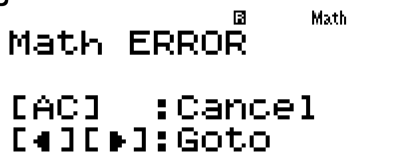


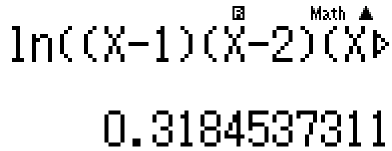


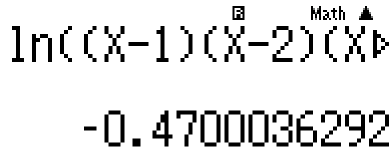
Cả 3 giá trị trên đều là giá trị tới hạn $\Rightarrow$ Chia thành 4 khoảng nghiệm $(-\infty;1);(1;2);(2;3);(3;+\infty)$

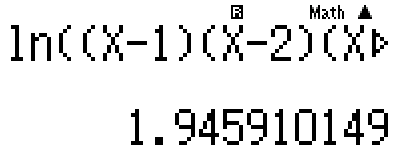
- CALC với 4 giá trị đại diện cho 4 khoảng này là $0;\frac{3}{2};\frac{5}{2};4$

[▲] [▲] [▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [(−)] [)] [SHIFT] [CALC] [=] [5] [=] [SHIFT] [RCL] [°''']









Ta cần lấy dấu dương $\Rightarrow$ Lấy khoảng 2 và khoảng 4 $\Rightarrow$ **A** là đáp số chính xác

<u>Bài 2</u>-[THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội 2017] Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ là :

A. $[1;+\infty)$ **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

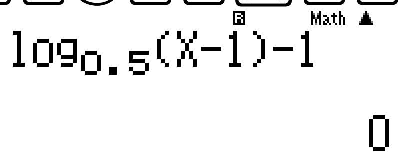
GIẢI

❖ **Casio cách 4**

- Tập xác định $\Leftrightarrow \log_2(x-1)-1\ge 0$. Kiểm tra các giá trị $1;\frac{3}{2}$

[log■□] [0] [•] [5] [▶] [ALPHA] [)] [−] [1] [▶] [−] [1] [CALC] [1] [=] [◀] [CALC] [3] [÷] [2] [=]

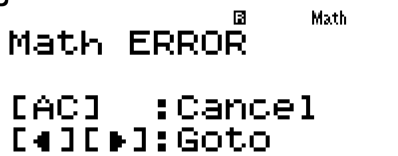


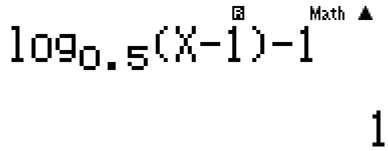


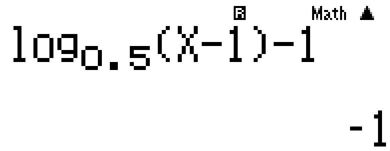
Cả 2 giá trị trên đều là giá trị tới hạn $\Rightarrow$ Chia thành 3 khoảng nghiệm $(-\infty;1);\left(1;\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

- CALC với 3 giá trị đại diện cho 4 khoảng này là $0;1.25;2$

[▲] [▲] [▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [(−)] [)] [SHIFT] [CALC] [=] [5] [=] [SHIFT] [RCL] [°''']







Ta cần lấy dấu dương $\Rightarrow$ Lấy khoảng 2 $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác

<u>Bài 3</u>-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nghiệm của bất phương trình $\log_{x-1}(x^2+x-6)>1$ là :

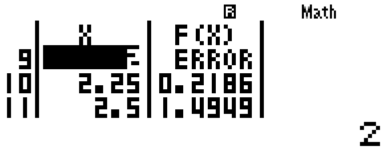
A. $x>1$ **B.** $x>\sqrt{5}$ **C.** $x>1;x\ne 2$ **D.** $1<x<\sqrt{5},x\ne 2$

GIẢI

❖ **Casio cách 3**

- Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1>0$. Quan sát đáp số xuất hiện các giá trị $1;2;\sqrt{5}\approx 2.23$.
  Sử dụng MODE 7 với Start 0 End 3 Step 0.25

MODE 7 log□ ALPHA) − 1 ▶ ALPHA) x² + ALPHA) − 6 ▶ − 1 = = 0
= 3 = 0 • 2 5 =



Rõ ràng $x>\sqrt{5}\approx 2.23$ làm cho vế trái bất phương trình nhận dấu dương $\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 4-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Giải bất phương trình $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}\le\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$:

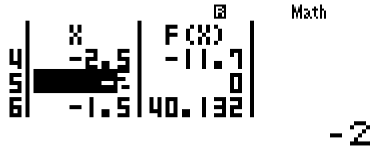
A. $x\le -2$ **B.** $x\ge 4$ **C.** $-2\le x\le 4$ **D.** $x\le -2$ hoặc $x\ge 4$

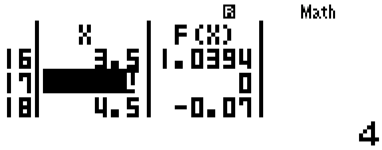
GIẢI

❖ **Casio cách 3**

- Chuyển bất phương trình về dạng xét dấu $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}\le 0$
- Quan sát đáp số xuất hiện các giá trị $-2;4$. Sử dụng MODE 7 với Start -4 End 5 Step 0.5

SHIFT MODE 4 MODE 7 tan ▭ SHIFT x10ˣ ▼ 7 ▶) x■ ALPHA) x² − ALPHA) − 9
▶ − tan ▭ SHIFT x10ˣ ▼ 7 ▶) x■ ALPHA) − 1 = = − 4 = 5 = 0
• 5 =





Quan sát bảng giá trị . Rõ ràng $x\le -2$ và $x\ge 4$ làm cho vế trái bất phương trình ≥ 0 $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 5-[THPT HN Amsterdam 2017] Bất phương trình $2^{x^2}.3^x<1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên :

A. 1 **B.** Vô số **C.** 0 **D.** 2

GIẢI

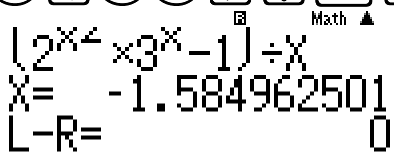
- Chuyển bất phương trình về dạng xét dấu $2^{x^2}.3^x-1<0$
- Tìm cận thứ nhất bằng chức năng SHIFT SOLVE

2 x■ ALPHA) x² ▶ × 3 x■ ALPHA) ▶ − 1 = SHIFT CALC 1 =



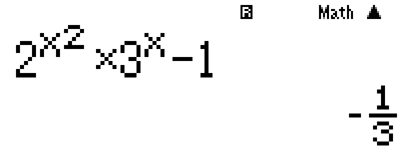
- Khử cận thứ nhất và tiếp tục dò cận thứ hai

▶ (◀ ◀) ÷ ALPHA) SHIFT CALC − 1 =



Vậy ta dự đoán khoảng nghiệm là $(-1.5849...;0)$. Kiểm tra dấu bằng cách lấy giá trị đại diện $x=-1$

▲ CALC − 1 =



Ta thấy dấu $-$ vậy khoảng nghiệm là $(-1.5849...;0) \Rightarrow$ có 1 nghiệm nguyên $x=-1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 6-[Thi thử Báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017] Tập nghiệm của bất phương trình $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0$ là tập con của tập

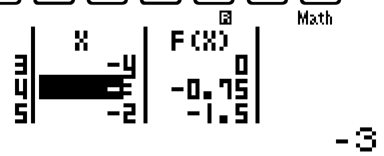
A. $(-5;-2)$ **B.** $(-4;0)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(-3;1)$

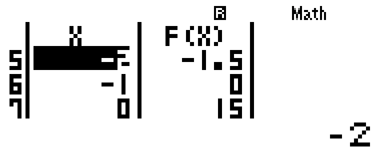
GIẢI

❖ **Casio cách 3**

- Sử dụng MODE 7 với Start -6 End 6 Step 1

MODE 7 3 2 × 4 $x^■$ ALPHA) ▶ − 1 8 × 2 $x^■$ ALPHA) ▶ + 1 = = − 6 = 6 = 1 =





Quan sát bảng giá trị . Rõ ràng khoảng nghiệm làm cho vế trái $-$ thuộc khoảng $(-4;0)$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác.

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 14. TÌM SỐ CHỮ SỐ CỦA MỘT LŨY THỪA.

1) BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

Hôm nay tôi lại nhận được 3 bài toán của thầy BìnhKami, 3 bài toán này liên quan đến so sánh 2 lũy thừa cùng cơ số.

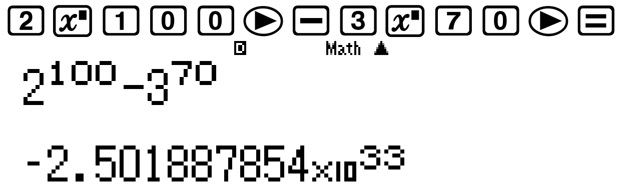
Bài toán 1 : So sánh 2 lũy thừa 32^{10} và 16^{15}

Bài toán 2 : So sánh 2 lũy thừa 2^{100} và 3^{70}

Bài toán 3 : So sánh 2 lũy thừa $2^{2017}-5^{999}$

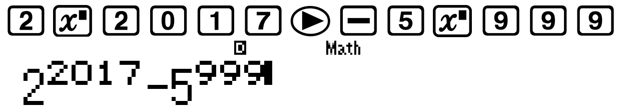
Đối với bài toán số 1 thì tôi đã biết cách làm rồi, cơ số 32 và cơ số 16 đều có thể đưa về cơ số 2, vậy $32^{10}=\left(2^5\right)^{10}=2^{5.10}=2^{50}$ và $16^{15}=\left(2^4\right)^{15}=2^{4.5}=2^{60}$. Vậy $32^{10}<16^{15}$

Đối với bài số 2 không thể đưa về cùng cơ số 2 hay 3 vì vậy tôi dùng sự trợ giúp của máy tính Casio, tôi sẽ thiết lập hiệu $2^{100}-3^{70}$ *nếu kết quả ra một giá trị dương thì* $2^{100}>3^{70}$ *, thật đơn giản phải không* !!

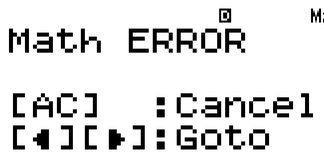


Hay quá ra một giá trị âm, vậy có nghĩa là $2^{100}<3^{70}$

Tương tự như vậy tôi sẽ làm bài toán số 3 bằng cách nhập hiệu $2^{2017}-5^{999}$ *vào máy tính Casio*



Và tôi bấm nút =



Các bạn thấy đấy, máy tính không tính được. Tôi chịu rồi !!

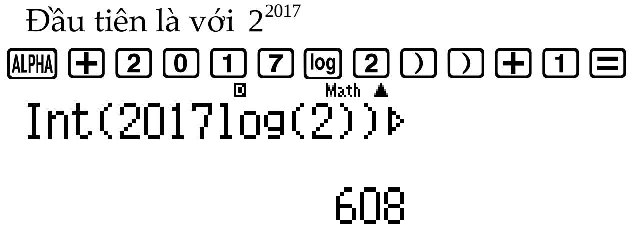
Để so sánh 2 lũy thừa có giá trị quá lớn mà máy tính Casio không tính được thì chúng ta phải sử dụng một thủ thuật, tôi gọi tắt là BSS. Thủ thuật BSS dựa trên một nguyên tắc so sánh như sau : Nếu số A có $n+1$ chữ số thì luôn lớn hơn số B có n chữ số .

Ví dụ như số 1000 có 4 chữ số sẽ luôn lớn hơn số 999 có 3 chữ số.

Vậy tôi sẽ xem 2^{2107} và 5^{999} thì lũy thừa nào có số chữ số nhiều hơn là xong.

Để làm được việc này tôi sẽ sử dụng máy tính Casio nhưng với tính năng cao cấp hơn, các bạn quan sát nhé :

Đầu tiên là với 2^{2017}



Vậy tôi biết 2^{2017} có 608 chữ số

Tiếp theo là với 5^{999}

ALPHA + 9 9 9 log 5)) + 1 =

Int(999log(5))+1

699

Vậy 5^{999} có 699 chữ số

Rõ ràng $608 > 699$ hay $2^{2017} < 5^{999}$. Thật tuyệt vời phải không !!

- ❖ **Bình luận nguyên tắc hình thành lệnh tính nhanh Casio**
  - ➢ Ta thấy quy luật 10^1 có 2 chữ số, 10^2 có 3 chữ số … 10^k sẽ có $k+1$ chữ số
  - ➢ Vậy muốn biết 1 lũy thừa A có bao nhiêu chữ số ta sẽ đặt $A = 10^k$. Để tìm k ta sẽ logarit cơ số 10 cả 2 vế khi đó $k = \log A$. Vậy số chữ số sẽ là $k+1 = [\log A]+1$
  - ➢ Lệnh Int dùng để lấy phần nguyên của 1 số.

2)VÍ DỤ MINH HỌA

<u>VD1</u>-[Bài toán số nguyên tố Mersenne] Đầu năm 2016, Curtis Cooper và các cộng sự nhóm nghiên cứu Đại học Central Mis-souri, Mỹ vừa công bố số nguyên tố lớn nhất tại thời điểm đó. Số nghuyên tố này là một số có giá trị bằng $M = 2^{74207281} - 1$. Hỏi số M có bao nhiêu chữ số.

A. 2233862 **B.** 22338618 **C.** 22338617 **D.** 2233863

GIẢI

- ❖ **CASIO**
- ➢ Ta có $M = 2^{742007281} - 1 \Leftrightarrow M + 1 = 2^{742007281}$
- ➢ Đặt $M + 1 = 10^k \Leftrightarrow 2^{742007281} = 10^k \Leftrightarrow k = \log 2^{74207281}$ và số chữ số là $[k]+1$

  ALPHA + 7 4 2 0 7 2 8 1 log 2)) + 1 =

  Int(74207281log▸

  22338618

  Vậy $M+1$ có số chữ số là 22338618
- ➢ Ta nhận thấy $M+1$ có 22338618 chữ số, vậy M có bao nhiêu chữ số ? Liệu vẫn là 22338618 chữ số hay suy biến còn 22338617 chữ số.
- ➢ Câu trả lời là không suy biến vì M là lũy thừa bậc của 2 nên tận cùng chỉ có thể là 2, 4, 8, 6 nên khi trừ đi 1 đơn vị vẫn không bị suy biến

  Vậy ta chọn **B** là đáp án chính xác.
- ❖ Đọc thêm :
- ▪ $M = 2^{74207281} - 1$ là số nguyên tố lớn nhất thế giới được phát hiện, gồm 22 triệu chữ số, mất 127 ngày để đọc hết
- ▪ Giả sử 1 giây bạn có thể đọc được 2 chữ số, bạn không cần ăn uống, ngủ nghỉ…thì 4 tháng liên tục là quãng thời gian mà bạn cần phải bỏ ra để đọc hết con số nguyên tố lớn nhất thế giới do các nhà toán học phát hiện mới đây. Với tên gọi $M74207281$ con số nguyên tố Merssenne được phát hiện bởi các nhà toán học thuộc GIMPS-tổ chức thành lập năm 1996 chuyên đi tìm những con số nguyên tố.

- Câu chuyện đi tìm số nguyên tố bắt đầu từ một nhà toán học, thần học, triết học tự nhiên, Marin Mersenne (1588-1648). Ông là người đã nghiên cứu các số nguyên tố nhằm cố tìm ra một công thức chung đại diện cho các số nguyên tố. Dựa trên các nghiên cứu của ông, các nhà toán học thế hệ sau đã đưa ra một công thức chung cho các số nguyên tố là $M_p = 2^p - 1$
- Năm 1750 nhà toán học Ơ-le phát hiện ra số nguyên tố M_{31}
  Năm 1876 số M_{127} được nhà toán học Pháp Lucas Edouard phát hiện ra
  Năm 1996 số nguyê tố lớn nhất thời đó được phát hiện là $M_{1398268}$

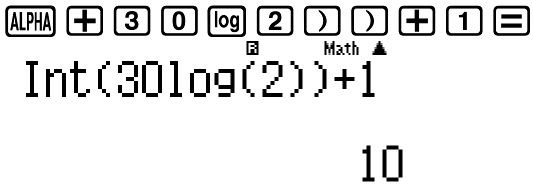
VD2-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]
Gọi m là số chữ số cần dùng khi viết số 2^{30} trong hệ thập phân và n là số chữ số cần dùng khi viết số 30^2 trong hệ nhị phân. Ta có tổng $m+n$ là :

A. 18 **B.** 20 **C.** 19 **D.** 21

GIẢI

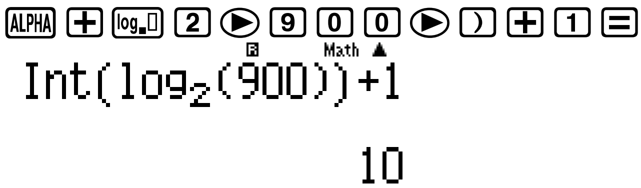
❖ **CASIO**

➢ Đặt $2^{30} = 10^k \Leftrightarrow k = \log 2^{30}$. Số chữ số của 2^{30} trong hệ thập phân là $[k]+1$



Vậy số chữ số của 2^{30} trong hệ thập phân là 10

➢ Đặt $30^2 = 900 = 2^h \Leftrightarrow h = \log_2 900$. Số chữ số của 30^2 trong hệ nhị phân là $[h]+1$



Vậy số chữ số của 30^2 trong hệ nhị phân là 10 $\Rightarrow m+n = 10+10 = 20$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD3: Cho tổng $M = C_{2020}^0 + C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + ... + C_{2020}^{2020}$ Khi viết M dưới dạng 1 số trong hệ thập phân thì số này có bao nhiêu chữ số:

A. 608 **B.** 609 **C.** 610 **D.** 611

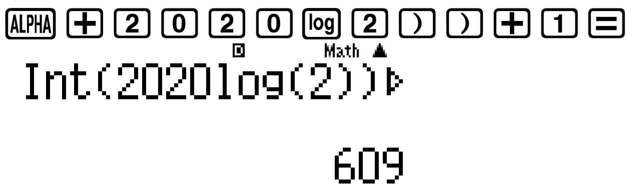
GIẢI

❖ **CASIO**

➢ Theo khai triển nhị thức Newton thì $(1+1)^{2020} = C_{2020}^0 + C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + ... + C_{2020}^{2020}$

Vậy $M = 2^{2020}$

➢ Đặt $2^{2020} = 10^k \Leftrightarrow k = \log 2^{2020}$. Số chữ số của M là $[k]+1$



Vậy số chữ số của M là 609. Ta chọn đáp án **B**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán này là sự kết hợp hay giữa kiến thức lũy thừa và kiến thức về nhị thức Newton. Để làm được bài toán này bằng Casio thì cần có một số kiến thức cơ bản về tổng Nhị thức Newton
- Dạng toán tổng nhị thức Newton được tác giả tóm tắt như sau :

  +)Cho khai triển tổng $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n a^0 b^n$ và khai triển tổng $(a-b)^n = C_n^0 a^n b^0 - C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 ... + C_n^n a^0 b^n$

  +)Để quan sát xem tổng nhị thức Newton có dạng là gì ta quan sát 3 thông số : Thông số mũ n thì quan sát tổ hợp C_n^1 ví dụ như xuất hiện C_{2020}^1 thì rõ ràng $n = 2020$. Thông số a sẽ có số mũ giảm dần, thông số b sẽ có số mũ tăng dần

  +)Áp dụng $C_{1999}^0 5^{1999} - C_{1999}^1 5^{1998} 2 + C_{1999}^2 5^{1997} 2^2 - C_{1999}^3 5^{1996} 2^3 + ... - C_{1999}^{1999} 2^{1999}$ thì rõ ràng $n = 1999$, số mũ của a giảm dần vậy $a = 5$, số mũ của b tăng dần vậy $b = 2$. Ta thu gọn khai triển thành $(5-2)^{1999} = 3^{1999}$

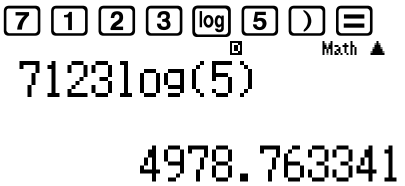
VD4: So sánh nào sau đây là đúng

A. $5^{7123} > 7^{5864}$ **B.** $5^{7123} < 7^{5864}$ **C.** $3^{400} < 2^{500}$ **D.** $4^{1700} > 9^{1200}$

GIẢI

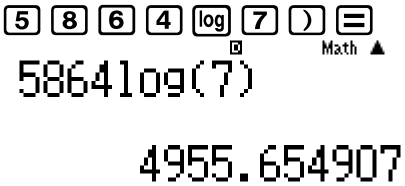
❖ **CASIO**

➢ Đặt $5^{7123} = 10^k \Leftrightarrow k = \log 5^{7123} = 7123 \log 5 \approx 4978.76 > 4978$



Vậy $5^{7123} > 10^{4978}$

➢ Tương tự đặt ta đặt $7^{5864} = 10^h \Leftrightarrow h = \log 7^{5864} \approx 4955.65 < 4956$

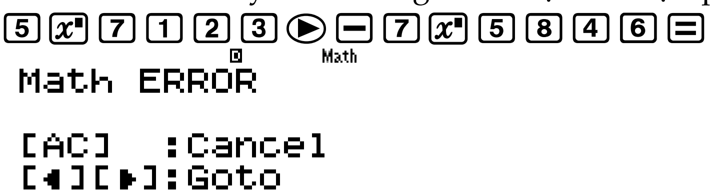


Vậy $7^{5864} < 10^{4956}$

➢ Tóm lại $5^{7123} > 10^{4978} > 10^{4566} > 7^{5864}$

❖ **Bình luận :**

- Bài toán này nếu ta thực hiện 1 phép Casio ở đẳng cấp thấp là nhập hiệu $5^{7123} - 7^{5864}$ rồi xét dấu thì máy tính không làm được vì vượt qua phạm vi 10^{100}



- Vậy để so sánh ta 2 đại lượng lũy thừa bậc cao M và N ta sẽ đưa về dạng $M > 10^k > 10^h > N$
- Tuy nhiên việc so sánh 2 lũy thừa sử dụng Casio ở mức độ đơn giản cũng thường xuất hiện trong đề thi của các trường, vậy ta cũng cần tìm hiểu thêm một chút. Các e xem ở ví dụ số 4 dưới đây.

VD5-[THPT Ngọc Hồi - Hà Nội 2017] Kết quả nào sau đây đúng :

A. $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} < \left(\frac{\pi}{6}\right)^{18}$ **B.** $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{17} > \left(\frac{\pi}{3}\right)^{18}$

C. $\left(\frac{e}{3}\right)^{17} > \left(\frac{e}{3}\right)^{18}$ **D.** $\left(\frac{e}{2}\right)^{17} > \left(\frac{e}{2}\right)^{18}$

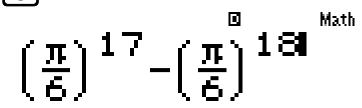
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

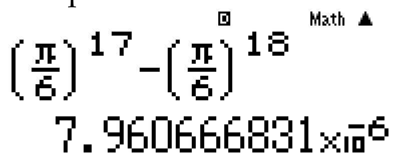
➢ Để kiểm tra tính Đúng – Sai của đáp án A ta sẽ thiết lập hiệu $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^{18}$. Vậy bài so sánh chuyển về bài bất phương trình $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^{18} < 0$

Rồi nhập hiệu trên vào máy tính Casio

(▭ SHIFT ×10^x ▼ 6 ▶) x^■ 1 7 ▶ − (▭ SHIFT ×10^x ▼ 6 ▶) x^■ 1 8



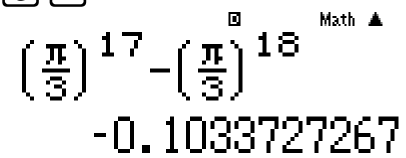
Rồi ta nhấn nút = nếu kết quả ra 1 giá trị âm thì đáp án **A** đúng còn ra giá trị dương thì đáp án **A** sai



Máy tính Casio báo kết quả ra 1 giá trị dương vậy rõ ràng đáp án **A** sai.

➢ Tương tự vậy đối với đáp án B

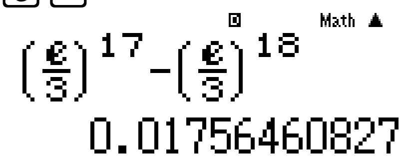
(▭ SHIFT ×10^x ▼ 3 ▶) x^■ 1 7 ▶ − (▭ SHIFT ×10^x ▼ 3 ▶) x^■ 1 8 =



Vậy đáp số **B** cũng sai

➢ Ta lại tiếp tục với đáp án **B**

(▭ ALPHA ×10^x ▼ 3 ▶) x^■ 1 7 ▶ − (▭ ALPHA ×10^x ▼ 3 ▶) x^■ 1 8 =



Đây là 1 đại lượng dương vậy $\left(\frac{e}{3}\right)^{17} - \left(\frac{e}{3}\right)^{18} > 0$ hay $\left(\frac{e}{3}\right)^{17} > \left(\frac{e}{3}\right)^{18}$

Tới đây ta thấy rõ ràng đáp số **C** là đáp số chính xác !!

❖ **Cách 2 : Tự luận**

▪ Ta có cơ số $\frac{\pi}{6} \approx 0.52 \in (0;1)$ và số mũ $17 < 18$ vậy $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} > \left(\frac{\pi}{6}\right)^{18}$ $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Ta có cơ số $\frac{\pi}{3} \approx 1.04 > 1$ và số mũ $17 < 18$ vậy $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{17} < \left(\frac{\pi}{3}\right)^{18} \Rightarrow$ Đáp án **B** sai
- Ta có cơ số $\frac{e}{3} \approx 0.906 \in (0;1)$ và số mũ $17 < 18$ vậy $\left(\frac{e}{3}\right)^{17} > \left(\frac{e}{3}\right)^{18} \Rightarrow$ Đáp số **C** sai

❖ **Bình luận**

- Để so sánh 2 lũy thừa cùng cơ số a^u và a^v ta sử dụng tính chất sau :
  +) Nếu cơ số $a > 1$ và $u > v$ thì $a^u > a^v$ (Điều này dẫn tới đáp án **B** sai)
  +) Nếu cơ số a thuộc khoảng $(0;1)$ và $u > v$ thì $a^u < a^v$ (Điều này dẫn tới đáp án **A** sai)

VD6-[THPT-Hà Nội-Amsterdam 2017] (Bài toán xây dựng để chống lại Casio)
Khẳng định nào sau đây sai ?

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^3$ **B.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}$

C. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2016} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$ **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2016}$

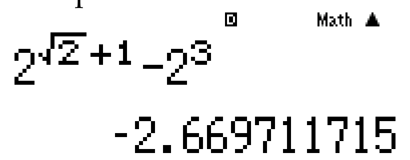
GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Để kiểm tra tính Đúng – Sai của đáp án A ta sẽ thiết lập hiệu $2^{\sqrt{2}+1} - 2^3$. Vậy bài so sánh chuyển về bài bất phương trình $2^{\sqrt{2}+1} - 2^3 > 0$
Rồi nhập hiệu trên vào máy tính Casio
2 $x^{\blacksquare}$ $\sqrt{\blacksquare}$ 2 ▶ + 1 ▶ − 2 $x^{\blacksquare}$ 3

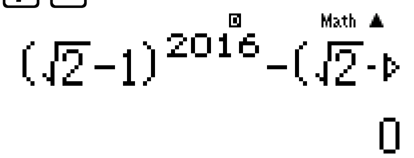


Rồi ta nhấn nút = nếu kết quả ra 1 giá trị dương thì đáp án **A** đúng còn ra giá trị âm thì đáp án **A** sai



Máy tính Casio báo kết quả ra 1 giá trị âm vậy rõ ràng đáp án **A** sai.

➢ Tương tự vậy đối với đáp án B
($\sqrt{\blacksquare}$ 2 ▶ − 1) $x^{\blacksquare}$ 2 0 1 6 ▶ − ($\sqrt{\blacksquare}$ 2 ▶ − 1) $x^{\blacksquare}$ 2 0 1 7 =



Đáp số máy tính báo là 0 điều này là vô lý vì cơ số khác 0 và số mũ khác nhau buộc $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$ và $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}$ buộc phải khác nhau.
Như vậy trong trường hợp này thì máy tính chịu !!!

❖ **Cách 2: Tự luận**

- Ngoài phương pháp so sánh 2 lũy thừa cùng cơ số được tác giả trình bày ở Ví dụ 3 thì tại Ví dụ 4 này tác giả xin giới thiệu 1 phương pháp thứ 2 vô cùng hiệu quả có tên là **Phương pháp đặt nhân tử chung**.

- Đáp án B : $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > 0$

  $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}\left[1-\left(\sqrt{2}-1\right)\right] > 0 \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} > 0$

  Dễ thấy $2-\sqrt{2} > 0$ và $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} > 0$ vậy $\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} > 0 \Rightarrow$ Đáp số **B** đúng

❖ **Bình luận :**

- Theo thuật toán của Casio thì những đại lượng dương mà nhỏ hơn10^{-100} hoặc lớn hơn -10^{-100} thì sẽ được hiển thị là ố 0 .

  Đây là kẽ hở để các trường ra bài toán so sánh lũy thừa chống lại Casio

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Bài toán số nguyên tố Fecmat] Nhà toán học Pháp Pierre de Fermat là người đầu tiên đưa ra khái niệm số Fecmat $F_n = 2^{2^n}+1$ là một số nghuyên tố với n là số dương không âm. Hãy tìm số chữ số của F_{13}

A.1243 **B.** 1234 **C.** 2452 **D.** 2467

*Chú ý : Sự dự đoán của Fecmat là sai lầm vì nhà toán học Ơ le đã chứng minh được F_5 là hợp số.

Bài 2: Cho tổng $M = C_{1642}^{0}3^{1642} + C_{1642}^{1}3^{1641}2 + C_{1642}^{3}3^{1640}2^{3} + ... + C_{1642}^{1642}2^{1642}$ Khi viết M dưới dạng 1 số trong hệ thập phân thì số này có bao nhiêu chữ số:

A. 608 **B.** 609 **C.** 610 **D.** 611

*Chú ý : 1642 là năm sinh của nhà toán học, vật lý học, thiên văn học, thần học, giả kim thuật vĩ đại người Anh Isaac Newton.

Bài 3: So sánh nào sau đây là đúng

A. $11^{2003} > 9^{2500}$ **B.** $23^{693} < 25^{600}$ **C.** $29^{445} < 31^{523}$ **D.** $29^{445} > 31^{523}$

Bài 4-[Thi thử THPT Ngọc Hồi - Hà Nội lần 1 năm 2017] Cho a,b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b=10$ và $a^{12}b^{2016}$ là một số tự nhiên có 973 chữ số. Cặp a,b thỏa mãn bài toán là :

A. $(5;5)$ **B.** $(6;4)$ **C.** $(8;2)$ **D.** $(7;3)$

Bài 5-[THPT Ngọc Hồi - Hà Nội 2017] Kết quả nào sau đây đúng :

A. $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{17} < \left(\frac{\pi}{6}\right)^{18}$ **B.** $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{17} > \left(\frac{\pi}{3}\right)^{18}$

C. $\left(\frac{e}{3}\right)^{17} > \left(\frac{e}{3}\right)^{18}$ **D.** $\left(\frac{e}{2}\right)^{17} > \left(\frac{e}{2}\right)^{18}$

Bài 6-[THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội 2017] Mệnh đề nào sau đây đúng :

A. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4 < \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5$ **B.** $\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^6 > \left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^7$

C. $\left(2-\sqrt{2}\right)^3 < \left(2-\sqrt{2}\right)^4$ **D.** $\left(4-\sqrt{2}\right)^3 < \left(4-\sqrt{2}\right)^4$

Bài 7-[THPT Thăng Long - Hà Nội 2017] Khẳng định nào sau đây đúng :

A. $\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} > \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}$ **B.** $\left(2-\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} > 1$

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-3} > \left(\sqrt{2}+1\right)^{\sqrt{3}}$ **D.** $(0,3)^{\sqrt{3}} > (0,3)^2$

Bài 1-[Bài toán số nguyên tố Fecmat] Nhà toán học Pháp Pierre de Fermat là người đầu tiên đưa ra khái niệm số Fecmat $F_n = 2^{2^n} + 1$ là một số nghuyên tố với n là số dương không âm. Hãy tìm số chữ số của F_{13} trong hệ nhị phân

A. 1243 **B.** 1234 **C.** 2452 **D.** 2467

GIẢI

❖ **Casio**

- Số F_{13} có dạng $2^{2^{13}} + 1$. Ta thấy số $2^{2^{13}} + 1$ không thể tận cùng là 9 nên số chữ số của $2^{2^{13}} + 1$ cũng chính là số chữ số của $2^{2^{13}}$ trong hệ thập phân.
- Đặt $2^{2^{13}} = 10^k \Leftrightarrow k = 2^{13}\log(2)$. Số chữ số của $2^{2^{13}}$ trong hệ thập phân là $[k]+1$

ALPHA + 2 x■ 1 3 ▶ log 2)) + 1 =

Int(2^{13}log(2))+1

2467

$\Rightarrow$Đáp số chính xác là **D**

Bài 2: Cho tổng $M = C_{1642}^0 3^{1642} + C_{1642}^1 3^{1641} 2 + C_{1642}^3 3^{1640} 2^2 + ... + C_{1642}^{1642} 2^{1642}$ Khi viết M dưới dạng 1 số trong hệ thập phân thì số này có bao nhiêu chữ số:

A. 608 **B.** 1148 **C.** 2610 **D.** 911

*Chú ý : 1642 là năm sinh của nhà toán học, vật lý học, thiên văn học, thần học, giả kim thuật vĩ đại người Anh Isaac Newton.

GIẢI

❖ **Casio**

- Rút gọn khai triển nhị thức Newton $M = (3+2)^{1642} = 5^{1642}$
- Đặt $5^{1642} = 10^k \Leftrightarrow k = 1642\log(5)$. Số chữ số của 5^{1642} trong hệ thập phân là $[k]+1$

ALPHA + 1 6 4 2 log 5)) + 1 =

Int(1642log(5))+1

1148

$\Rightarrow$Đáp số chính xác là **B**

Bài 3: So sánh nào sau đây là đúng

A. $11^{2003} > 9^{2500}$ **B.** $23^{693} < 25^{600}$ **C.** $29^{445} < 31^{523}$ **D.** $29^{445} > 31^{523}$

GIẢI

❖ **Casio**

- Số chữ số của 11^{2003} và 9^{2500} trong hệ thập phân lần lượt là :

ALPHA + 2 0 0 3 log 1 1)) + 1 = ALPHA + 2 5 0 0 log 9)) + 1 =

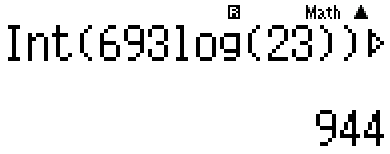
Int(2003log(11))+1 Int(2500log(9))+1

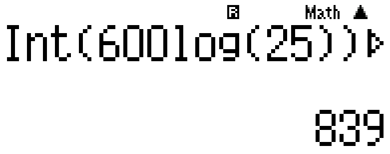
2086 2386

Số chữ số của 9^{2500} nhiều hơn số chữ số của 11^{2003} nên $9^{2500} > 11^{2003}$ $\Rightarrow$ **A** sai

- Số chữ số của 23^{693} và 25^{600} trong hệ thập phân lần lượt là :

Q+693g23))+1=Q+600g25))+1=

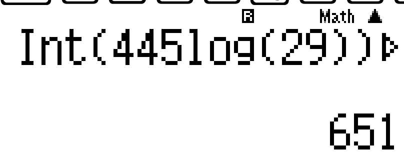


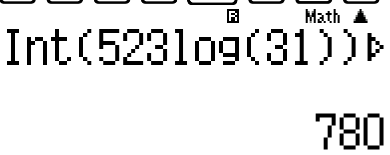


Số chữ số của 23^{693} nhiều hơn số chữ số của 25^{600} nên $23^{693} > 25^{600}$ $\Rightarrow$ **B** sai

- Số chữ số của 29^{445} và 31^{523} trong hệ thập phân lần lượt là :

ALPHA + 6 9 3 log 2 3)) + 1 = ALPHA + 6 0 0 log 2 5)) + 1 =





Số chữ số của 29^{445} nhỏ hơn số chữ số của 31^{523} nên $29^{445} < 31^{523}$ $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác

<u>Bài 4</u>: Cho a,b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b=10$ và $a^{12}b^{2016}$ là một số tự nhiên có 973 chữ số. Cặp a,b thỏa mãn bài toán là :

A. $(5;5)$ **B.** $(6;4)$ **C.** $(8;2)$ **D.** $(7;3)$

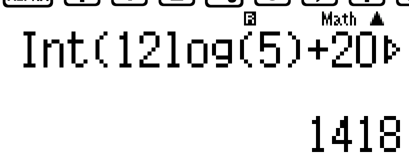
GIẢI

❖ **Casio**

- Ta có $a+b=10 \Rightarrow a=10-b$. Khi đó $a^{12}b^{2016}=(10-b)^{12}b^{2016}$
- Đặt $(10-b)^{12}b^{2016}=10^k \Leftrightarrow k=\log\left[(10-b)^{12}b^{2016}\right]=12\log(10-b)+2016\log b$

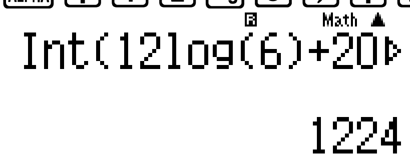
  Số chữ số của $(10-b)^{12}b^{2016}$ là $[k]+1$
- Với đáp số **A** : $a=b=5$. Số chữ số của $5^{12}5^{2016}$ là 1418 khác 973 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

ALPHA + 1 2 log 5) + 2 0 1 6 log 5)) + 1 =



- Với đáp số **B** : $a=6;b=4$. Số chữ số của $6^{12}4^{2016}$ là 1224 khác 973 $\Rightarrow$ Đáp số **B** sai

ALPHA + 1 2 log 6) + 2 0 1 6 log 4)) + 1 =



- Tương tự với $a=7;b=3$. Số chữ số của $7^{12}7^{2016}$ là 973 $\Rightarrow$ Đáp số **C** chính xác

ALPHA + 1 2 log 7) + 2 0 1 6 log 3)) + 1 =



PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 15. TÍNH NHANH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC MŨ – LOGARIT.

1) PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ HÓA BIẾN

-Bước 1 : Dựa vào hệ thức điều kiện buộc của đề bài chọn giá trị thích hợp cho biến

-Bước 2 : Tính các giá trị liên quan đến biến rồi gắn vào A, B, C nếu các giá trị tính được lẻ

-Bước 3 : Quan sát 4 đáp án và chọn đáp án chính xác

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa THPT Quốc gia 2017] Đặt $a=\log_2 3,\ b=\log_5 3.$ Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

A. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$

C. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Tính giá trị của $a=\log_2 3$. Vì giá trị của a ra một số lẻ vậy ta lưu a vào A

[log□] [2] [▶] [3] [▶] [=] [SHIFT] [RCL] [(−)]

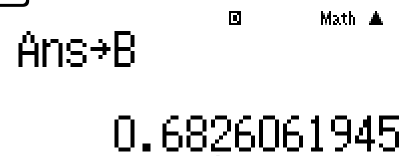




➢ Tính giá trị của $b=\log_5 3$ và lưu vào B

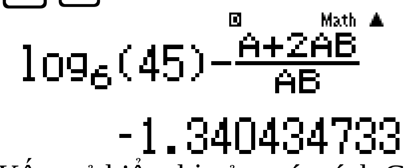
[log□] [5] [▶] [3] [=] [SHIFT] [RCL] [°'"]





➢ Bắt đầu ta kiểm tra tính đúng sai của đáp án **A**. Nếu đáp án **A** đúng thì hiệu $\log_6 45-\dfrac{a+2ab}{ab}$ phải bằng 0. Ta nhập hiệu trên vào máy tính Casio và bấm nút [=]

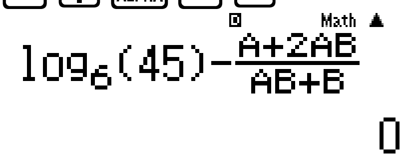
[log□] [6] [▶] [4] [5] [▶] [−] [□/□] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"] [▼] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"] [=]



Kết quả hiển thị của máy tính Casio là 1 giá trị khác 0 vậy đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy ta kiểm tra lần lượt từng đáp án và ta thấy hiệu $\log_6 45-\dfrac{a+2ab}{ab+b}$ bằng 0

[log□] [6] [▶] [4] [5] [▶] [−] [□/□] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"] [▼] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"] [+] [ALPHA] [°'"] [=]



Vậy $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$ hay đáp số **C** là đúng

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Ta có $a = \log_2 3 = \dfrac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{1}{a}$ và $\log_3 5 = \dfrac{1}{b}$
- Vậy $\log_6 45 = \dfrac{\log_3 45}{\log_3 6} = \dfrac{\log_3\left(3^2.5\right)}{\log_3(3.2)} = \dfrac{2+\log_3 5}{1+\log_3 2} = \dfrac{2+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{a}} = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$

❖ **Bình luận**

- Cách tự luận trong dạng bài này chủ yếu để kiểm tra công thức đổi cơ số : công thức 1 : $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$ (với $a \neq 1$) và công thức 2 : $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_a x}$ (với $b > 0; b \neq 1$)
- Cách Casio có vẻ nhiều thao tác nhưng dễ thực hiện và độ chính xác 100%. Nếu tự tin cao thì làm tự luận, nếu tự tin thấp thì nên làm Casio vì làm tự luận mà biến đổi sai 1 lần thôi rồi làm lại thì thời gian còn tốn hơn cả làm theo Casio

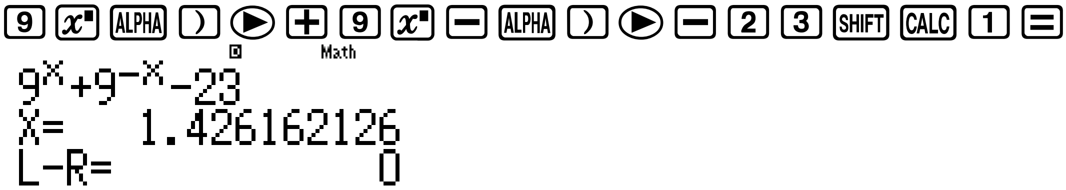
VD2-[THPT Yên Thế - Bắc Giang 2017] Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $P = \dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$ có giá trị bằng?

A. 2 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $-\dfrac{5}{2}$

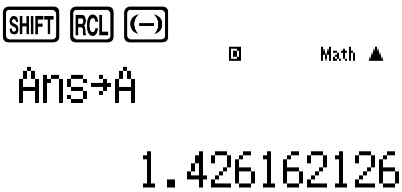
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

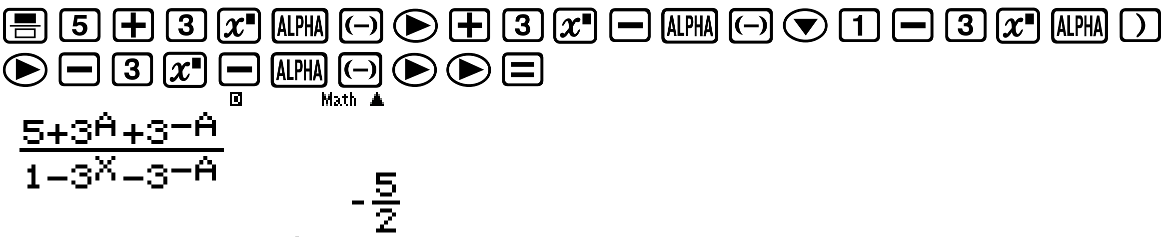
➢ Từ phương trình điều kiện $9^x + 9^{-x} = 23$ ta có thể dò được nghiệm bằng chức năng SHIFT SOLVE



Lưu nghiệm này vào giá trị A



➢ Để tính giá trị biểu thức P ta chỉ cần gắn giá trị $x = A$ sẽ được giá trị của P



Vậy rõ ràng **D** là đáp số chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Đặt $t = 3^x + 3^{-x} \Leftrightarrow t^2 = 9^x + 9^{-x} + 2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$

  Vì $3^x + 3^{-x} > 0$ vậy $t > 0$ hay 5
- Với $3^x + 3^{-x} = 5$. Thế vào P ta được $P = \dfrac{5+5}{1-5} = -\dfrac{5}{2}$

❖ **Bình luận**

- Một bài toán hay thể hiện sức mạnh của Casio
- Nếu trong một phương trình có cụm $a^x + a^{-x}$ thì ta đặt ẩn phụ là cụm này, khi đó ta có thể biểu diễn $a^{2x} + a^{-2x} = t^2 - 2$ và $a^{3x} - a^{-3x} = t^3 - 3t$

VD3-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y)$ Giá trị của tỉ số $\dfrac{x}{y}$ là ?

A. $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ **C.** 1 **D.** 2

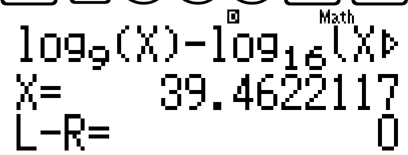
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Từ đẳng thức $\log_9 x = \log_{12} y \Rightarrow y = 12^{\log_9 x}$. Thay vào hệ thức $\log_9 x = \log_{16}(x+y)$ ta được : $\log_9 x - \log_{16}\left(x + 12^{\log_9 x}\right) = 0$

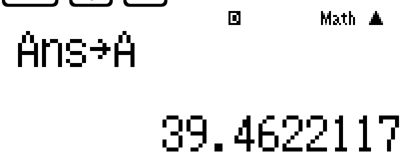
➢ Ta có thể dò được nghiệm phương trình $\log_9 x - \log_{16}\left(x + 12^{\log_9 x}\right) = 0$ bằng chức năng SHIFT SOLVE

[log■□] [9] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [−] [log■□] [1] [6] [▶] [ALPHA] [)] [+] [1] [2] [x■] [log■□] [9] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [▶] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



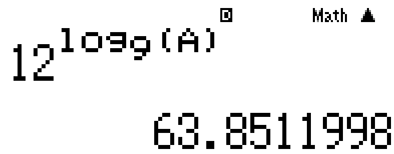
Lưu nghiệm này vào giá trị A

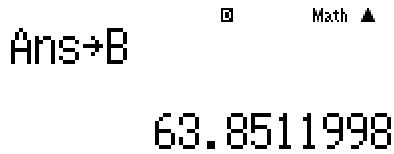
[SHIFT] [RCL] [(−)]



➢ Ta đã tính được giá trị x vậy dễ dàng tính được giá trị $y = 12^{\log_9 x}$. Lưu giá trị y này vào biến B

[1] [2] [x■] [log■□] [9] [▶] [ALPHA] [(−)] [=] [SHIFT] [RCL] [°'"]





➢ Tới đây ta dễ dàng tính được tỉ số $\dfrac{x}{y} = \dfrac{A}{B}$

[■/□] [ALPHA] [(−)] [▼] [ALPHA] [°'"] [=]



Đây chính là giá trị $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ và đáp số chính xác là **B**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y) = t$ vậy $x = 9^t; y = 12^t; x + y = 16^t$
- Ta thiết lập phương trình $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3^x}{4^x} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ và $\dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{16^x}{12^x} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$

Vậy $\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{y}$

Vì $\frac{x}{y}>0$ nên $\frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

❖ **Bình luận**

- Một bài toán cực khó nếu tính theo tự luận
- Nhưng nếu xử lý bằng Casio thì cũng tương đối dễ dàng và độ chính xác là 100%

VD4-[THPT Nguyễn Trãi – HN 2017] Cho $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}$ với $x>0, y>0$. Biểu thức rút gọn của K là ?

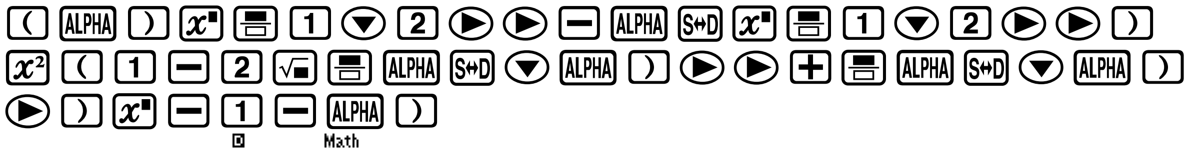
A. x **B.** $2x$ **C.** $x+1$ **D.** $x-1$

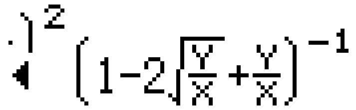
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta hiểu nếu đáp án A đúng thì $K=x$ hay hiệu $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}-x$ bằng 0 với mọi giá trị $x;y$ thỏa mãn điều kiện $x>0, y>0$

➢ Nhập hiệu trên vào máy tính Casio





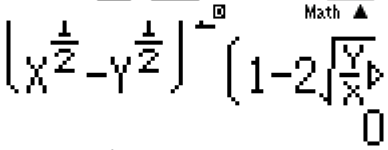
Chọn 1 giá trị $X=1.25$ và $Y=3$ bất kì thỏa $x>0, y>0$ rồi dùng lệnh gán giá trị CALC





➢ Ta đã tính được giá trị x vậy dễ dàng tính được giá trị $y=12^{\log_9 x}$

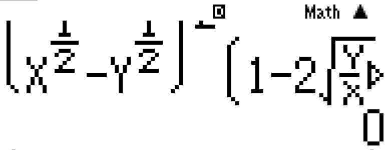




Vậy ta khẳng định 90% đáp án **A** đúng

➢ Để cho yên tâm ta thử chọn giá trị khác, ví dụ như $X=0.55, Y=1.12$





Kết quả vẫn ra là 0 , vậy ta chắc chắn **A** là đáp số chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Rút gọn $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

- Rút gọn $\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}=\left[\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-1\right)^2\right]^{-1}=\left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^2$

  Vậy $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^2=x$

❖ **Bình luận**

- Chúng ta cần nhớ nếu 1 khẳng định (1 hệ thức đúng) thì nó sẽ đúng với mọi giá trị x, y thỏa mãn điều kiện đề bài . Vậy ta chỉ cần chọn các giá trị $X, Y>0$ để thử và ưu tiên các giá trị này hơi lẻ, tránh số tránh (có khả năng xảy ra trường hợp đặc biệt)

VD5-[Thi thử Báo Toán Học Tuổi Trẻ 2017]
Cho hàm số $f(x)=2^{x^2+1}$ Tính giá trị của biểu thức $T=2^{-x^2-1}.f'(x)-2x\ln 2+2$

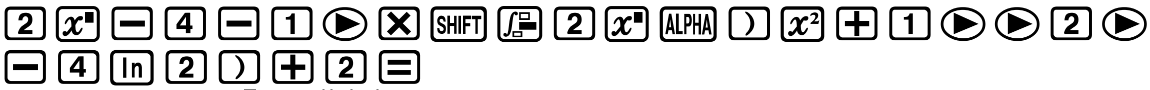
A. -2 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

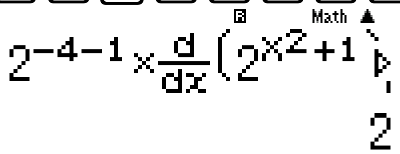
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Vì đề bài không nói rõ x thỏa mãn điều kiện ràng buộc gì nên ta có thể chọn một giá trị bất kì của x để tính giá trị biểu thức T . Ví dụ ta chọn $x=2$

Khi đó $T=2^{-4-1}f'(2)-4\ln 2+2$





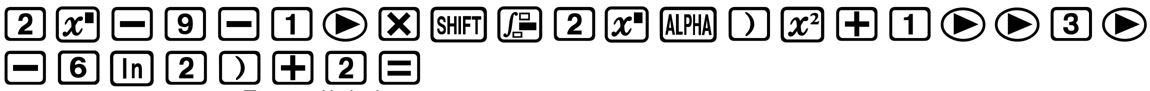
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

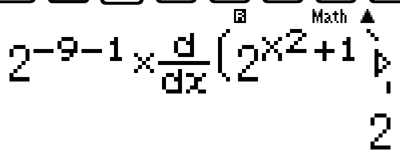
❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính $f'(x)=2^{x^2+1}.\ln 2.\left(x^2+1\right)'=2x.\ln 2.2^{x^2+1}$ và
- Thế vào $T=2^{-x^2-1}.2x\ln x.2^{x^2+1}-2x\ln 2+2=2x\ln 2-2x\ln 2+2=2$

❖ **Bình luận**

- Với bài toán không cho biểu thức ràng buộc của x có nghĩa là x là bao nhiêu cũng được. Ví dụ thay vì chọn $x=2$ như ở trên, ta có thể chọn $x=3$ khi đó $T=2^{-9-1}.f'(3)-6\ln 2+2$ kết quả vẫn ra 2 mà thôi.





- Chú ý công thức đạo hàm $\left(a^u\right)'=a^u.\ln a.u'$ học sinh rất hay nhầm

VD6-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ 2017] Rút gọn biểu thức $\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ (với $a>0$) được kết quả :

A. a^4 **B.** a **C.** a^5 **D.** a^3

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta phải hiểu nếu đáp **A** đúng thì hiệu $\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}-a^4$ phải $=0$ với mọi giá trị của a
- Nhập hiệu trên vào máy tính Casio

  [▭/▭] [ALPHA] [)] [x■] [√■] [3] [▶] [+] [1] [▶] [×] [ALPHA] [)] [x■] [2] [−] [√■] [3] [▼] [(] [ALPHA] [)] [x■] [√■] [2] [▶] [−] [2] [▶] [)] [x■] [√■] [2] [▶] [+] [2] [▶] [▶] [−] [ALPHA] [)] [x■] [4]

  $$\frac{X^{\sqrt{3}+1}\times X^{2-\sqrt{3}}}{(X^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}-X^4$$

  Chọn một giá trị a bất kỳ (ưu tiên A lẻ), ta chọn $a=1.25$ chả hạn rồi dùng lệnh tính giá trị CALC

  [CALC] [1] [•] [2] [5] [=]

  $$(X^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2} \qquad \frac{625}{1024}$$

  Vậy hiệu trên khác 0 hay đáp án A sai
- Bắt đầu ta kiểm tra tính đúng sai của đáp án **A**. Nếu đáp án **A** đúng thì hiệu $\log_6 45-\frac{a+2ab}{ab}$ phải bằng 0. Ta nhập hiệu trên vào máy tính Casio và bấm nút [=]

  [log■□] [6] [▶] [4] [5] [▶] [−] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°’’’] [▼] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°’’’] [=]

  $$\log_6(45)-\frac{A+2AB}{AB}$$

  $$-1.340434733$$

  Kết quả hiển thị của máy tính Casio là 1 giá trị khác 0 vậy đáp án **A** sai
- Để kiểm tra đáp số B ta sửa hiệu trên thành $\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}-a$

  [◀] [DEL] [DEL] [DEL]

  $$\frac{X^{\sqrt{3}+1}\times X^{2-\sqrt{3}}}{(X^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}-X$$

  Rồi lại tính giá trị của hiệu trên với $a=1.25$

  [CALC] [1] [•] [2] [5] [=]

  $$(X^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2} \qquad \frac{1845}{1024}$$

  Vẫn ra 1 giá trị khác 0 vậy B sai.
- Tương tự vậy ta sẽ thấy hiệu $\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}-a^5$

  $$\frac{X^{\sqrt{3}+1}\times X^{2-\sqrt{3}}}{(X^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}-X^5$$

  $$0$$

Vậy đáp số **C** là đáp số chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Ta rút gọn tử số $a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}=a^{\sqrt{3}+1+\left(2-\sqrt{3}\right)}=a^3$
- Tiếp tục rút gọn mẫu số $\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}=a^{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}=a^{2-4}=a^{-2}$
- Vậy phân thức trở thành $\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^{3-(-2)}=a^5$

❖ **Bình luận**

- Nhắc lại một số công thức hàm số mũ cơ bản xuất hiện trong ví dụ : $a^m.a^n=a^{m+n}$, $\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$, $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

<u>Bài 1</u>-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Cho $\log_2\left(\log_8 x\right)=\log_8\left(\log_2 x\right)$ thì $\left(\log_2 x\right)^2$ bằng ?

A. 3 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** 27 **D.** $\dfrac{1}{3}$

<u>Bài 2</u>-[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2017] Nếu $\log_{12}6=a,\log_{12}7=b$ thì :

A. $\log_2 7=\dfrac{a}{1-b}$ **B.** $\log_2 7=\dfrac{b}{1-a}$ **C.** $\log_2 7=\dfrac{a}{1+b}$ **D.** $\log_2 7=\dfrac{b}{1+a}$

<u>Bài 3</u>-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ 2017] Rút gọn biểu thức $\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ (với $a>0$) được kết quả :

A. a^4 **B.** a **C.** a^5 **D.** a^3

<u>Bài 4</u>-[THPT HN Amsterdam 2017] Biến đổi $\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x}}\ \left(x>0\right)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, ta được :

A. $x^{\frac{20}{21}}$ **B.** $x^{\frac{21}{12}}$ **C.** $x^{\frac{20}{5}}$ **D.** $x^{\frac{12}{5}}$

<u>Bài 5</u>-[Thi thử Chuyên Sư Phạm lần 1 năm 2017] Tìm x biết $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b$:

A. $x=a^3b^7$ **B.** $x=a^4b^7$ **C.** $x=a^4b^6$ **D.** $x=a^3b^6$

<u>Bài 6</u>-[THPT Kim Liên – HN 2017] Cho hàm số $y=2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. $y'+2y\ln 2=0$ **B.** $y'+3y\ln 2=0$ **C.** $y'-8h\ln 2=0$ **D.** $y'+8y\ln 2=0$

<u>Bài 7</u>-[THPT Nguyễn Trãi – HN 2017] Cho $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$ với $x>0,y>0$.

Biểu thức rút gọn của K là ?

A. x **B.** $2x$ **C.** $x+1$ **D.** $x-1$

<u>Bài 8</u>-[THPT Phạm Hồng Thái – HN 2017] Cho $a,b>0;a^2+b^2=1598ab$ Mệnh đề đúng là ;

A. $\log\dfrac{a+b}{40}=\dfrac{1}{2}\left(\log a+\log b\right)$ **B.** $\log\dfrac{a+b}{40}=\log a+\log b$

C. $\log\dfrac{a+b}{40}=\dfrac{1}{4}\left(\log a+\log b\right)$ **D.** $\log\dfrac{a+b}{40}=2\left(\log a+\log b\right)$

<u>Bài 9</u>-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Cho các số $a>0,b>0,c>0$ thỏa mãn $4^a=6^b=9^c$. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}$

A. 1 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** 2 **D.** $\dfrac{5}{2}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

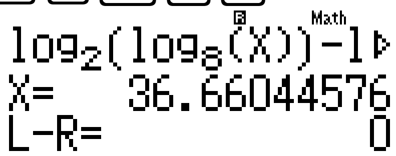
Bài 1-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Cho $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$ thì $(\log_2 x)^2$ bằng ?

A. 3 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** 27 **D.** $\frac{1}{3}$

GIẢI

- Phương trình điều kiện $\Leftrightarrow \log_2(\log_8 x) - \log_8(\log_2 x) = 0$. Dò nghiệm phương trình, lưu vào A

log▫ 2 ▶ log▫ 8 ▶ ALPHA) ▶ ▶ − log▫ 8 ▶ log▫ 2 ▶ ALPHA) SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL (−)





- Thế $x = A$ để tính $(\log_2 x)^2$

log▫ 2 ▶ ALPHA (−) ▶ x² =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

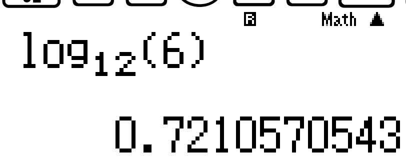
Bài 2-[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2017] Nếu $\log_{12} 6 = a, \log_{12} 7 = b$ thì :

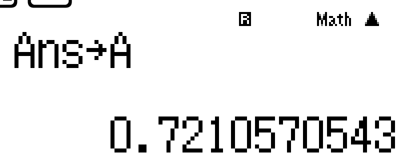
A. $\log_2 7 = \frac{a}{1-b}$ **B.** $\log_2 7 = \frac{b}{1-a}$ **C.** $\log_2 7 = \frac{a}{1+b}$ **D.** $\log_2 7 = \frac{b}{1+a}$

GIẢI

- Tính $\log_{11} 6$ rồi lưu vào A

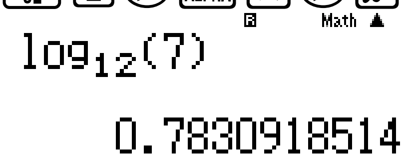
log▫ 1 2 ▶ 6 = SHIFT RCL (−)





- Tính $\log_{12} 7$ rồi lưu vào B

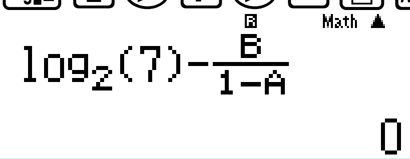
log▫ 2 ▶ ALPHA (−) ▶ x² =





Ta thấy $\log_2 7 - \frac{b}{1-a} = 0$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

log▫ 2 ▶ 7 ▶ − ▭/▭ ALPHA °''' ▼ 1 − ALPHA (−) =



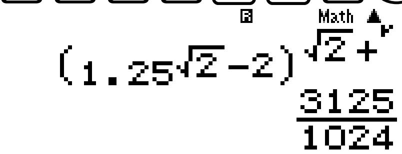
Bài 3-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ 2017] Rút gọn biểu thức $\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ (với $a > 0$) được kết quả :

A. a^4 **B.** a **C.** a^5 **D.** a^3

GIẢI

- Chọn $a>0$ ví dụ như $a=1.25$ chẳng hạn. Tính giá trị $\dfrac{1.25^{\sqrt{3}+1}.1.25^{2-\sqrt{3}}}{\left(1.25^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ rồi lưu vào A

[■/□] [1] [.] [2] [5] [x■] [√■] [3] [▶] [+] [1] [▶] [×] [1] [.] [2] [5] [x■] [2] [−] [√■] [3] [▼] [(] [1] [.] [2] [5] [x■] [√■] [2] [▶] [−] [2] [▶] [)] [x■] [√■] [2] [▶] [+] [2] [=] [SHIFT] [RCL] [(−)]





- Ta thấy $\dfrac{3125}{1024}=(1.25)^5=a^5 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

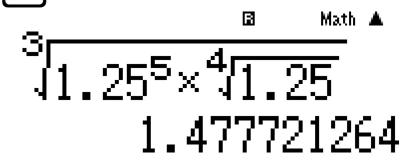
<u>Bài 4</u>-[THPT HN Amsterdam 2017] Biến đổi $\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x}}\ (x>0)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ, ta được :

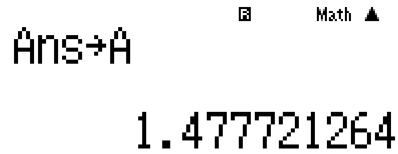
A. $x^{\frac{20}{21}}$ **B.** $x^{\frac{21}{12}}$ **C.** $x^{\frac{20}{5}}$ **D.** $x^{\frac{12}{5}}$

GIẢI

- Chọn $a>0$ ví dụ như $a=1.25$ chẳng hạn. Tính giá trị $\sqrt[3]{1.25^5\sqrt[4]{1.25}}$ rồi lưu vào A

[SHIFT] [x■] [3] [▶] [1] [.] [2] [5] [x■] [5] [▶] [×] [SHIFT] [x■] [4] [▶] [1] [.] [2] [5] [=] [SHIFT] [RCL] [(−)]





- Ta thấy $A=(1.25)^{\frac{21}{12}}=a^{\frac{21}{12}} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

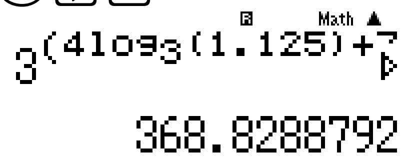
<u>Bài 5</u>-[Thi thử Chuyên Sư Phạm lần 1 năm 2017] Tìm x biết $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$:

A. $x=a^3b^7$ **B.** $x=a^4b^7$ **C.** $x=a^4b^6$ **D.** $x=a^3b^6$

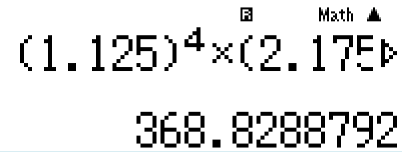
GIẢI

- Theo điều kiện tồn tại của hàm logarit thì ta chọn $a,b>0$. Ví dụ ta chọn $a=1.125$ và $b=2.175$
Khi đó $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow x = 3^{4\log_3 a + 7\log_3 b}$.

[3] [x■] [(] [4] [log■□] [3] [▶] [1] [.] [1] [2] [5] [▶] [+] [7] [log■□] [3] [▶] [2] [.] [1] [7] [5] [▶] [)] [=]



- Thử các đáp án ta thấy $x=(1.125)^4(1.175)^7 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**



<u>Bài 6</u>-[THPT Kim Liên – HN 2017] Cho hàm số $y=2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. $y'+2y\ln 2=0$ **B.** $y'+3y\ln 2=0$ **C.** $y'-8h\ln 2=0$ **D.** $y'+8y\ln 2=0$

GIẢI

- Chọn $x=1.25$ tính $y=2016.e^{1.25\ln\frac{1}{8}}$ rồi lưu vào A

2 0 1 6 × ALPHA x10^x x^■ 1 . 2 5 ln 1 ÷ 8) = SHIFT RCL (−)

2016×e^1.25ln(1÷ ▸ Ans→A

149.8400965 149.8400965

- Tính $y'(1.25)$ rồi lưu vào B

SHIFT ∫ 2 0 1 6 × ALPHA x10^x x^■ ALPHA) × ln 1 ÷ 8) ▶ ▶ 1 .
2 5 = SHIFT RCL °'''

$\frac{d}{dx}$(2016×e^X×ln(1 ▸ Ans→B

-311.5837213 -311.5837213

Rõ ràng $B+3\ln 2.A=0$ ⇒ Đáp số chính xác là **B**

Bài 7-[THPT Nguyễn Trãi – HN 2017] Cho $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}$ với $x>0, y>0$.

Biểu thức rút gọn của K là ?

A. x **B.** $2x$ **C.** $x+1$ **D.** $x-1$

GIẢI

- Chọn $x=1.125$ và $y=2.175$ rồi tính giá trị biểu thức K

(1 . 1 2 5 x^■ 0 . 5 ▶ − 2 . 1 7 5 x^■ 0 . 5 ▶) x²
× (1 − 2 √■ ▭/▭ 2 . 1 7 5 ▼ 1 . 1 2 5 ▶ ▶ + ▭/▭ 2 .
1 7 5 ▼ 1 . 1 2 5 ▶) x^■ − 1 =

(1.125^0.5−2.175 ▸

9/8

- Rõ ràng $K=\frac{9}{8}=1.125=x$ ⇒ Đáp số chính xác là **A**

Bài 8-[THPT Phạm Hồng Thái – HN 2017] Cho $a,b>0; a^2+b^2=1598ab$ Mệnh đề đúng là ;

A. $\log\frac{a+b}{40}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ **B.** $\log\frac{a+b}{40}=\log a+\log b$

C. $\log\frac{a+b}{40}=\frac{1}{4}(\log a+\log b)$ **D.** $\log\frac{a+b}{40}=2(\log a+\log b)$

GIẢI

- Chọn $a=2$ ⇒ Hệ thức trở thành $4+b^2=3196b$ ⇔ $b^2-3196b+4=0$. Dò nghiệm và lưu vào B

ALPHA) x² − 3 1 9 6 ALPHA) + 4 SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL °'''

X²−3196X+4 Ans→B
X= 1.2515649×10³
L−R= 0 1.251564946×10³

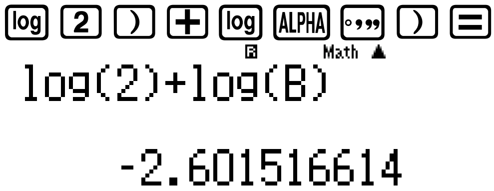
- Tính $\log\frac{a+b}{40}=\log\frac{2+B}{40}$

log ▭/▭ 2 + ALPHA °''' ▼ 4 0 ▶) =

log($\frac{2+B}{40}$)

-1.300758307

- Tính tiếp $\log a+\log b$



Rõ ràng giá trị $\log a + \log b$ gấp 2 lần giá trị $\log \frac{a+b}{40} \Rightarrow$ Đáp số **A** là chính xác

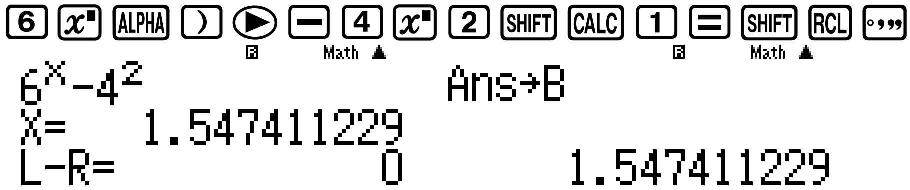
Bài 9-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Cho các số $a > 0,\ b > 0, c > 0$ thỏa mãn $4^a = 6^b = 9^c$. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{b}{a} + \frac{b}{c}$

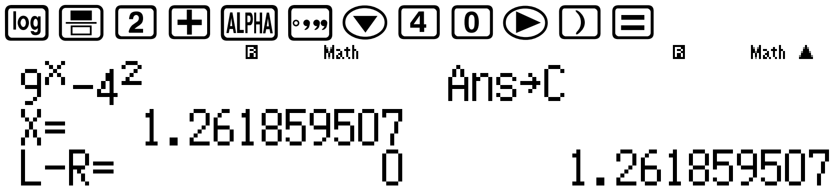
A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{5}{2}$

GIẢI

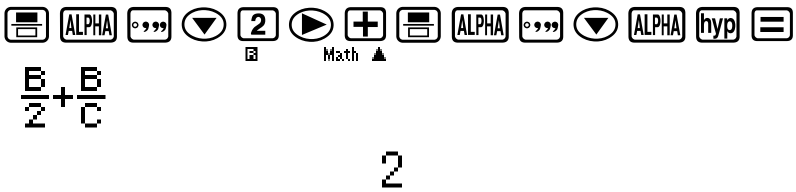
- Chọn $a = 2$ Từ hệ thức ta có $4^2 = 6^b \Leftrightarrow 6^b - 4^2 = 0$. Dò nghiệm và lưu vào B



- Từ hệ thức ta lại có $9^c - 4^2 = 0$. Dò nghiệm và lưu vào C



- Cuối cùng là tính $T = \frac{b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{B}{2} + \frac{B}{C} = 2 \ \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**



PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 16. CHỨNG MINH TÍNH ĐÚNG SAI MỆNH ĐỀ MŨ – LOGARIT.

1) PHƯƠNG PHÁP

Chứng minh tính đúng sai của mệnh đề mũ – logarit là một dạng tổng hợp khó. Vì vậy để làm được bài này ta phải vận dụng một cách khéo léo các phương pháp mà học từ các bài trước. Luyện tập các ví dụ dưới đây để lấy tích lũy kinh nghiệm xử lý.

1) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa THPT Quốc gia 2017] Cho các số thực a,b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$ **B.** $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$

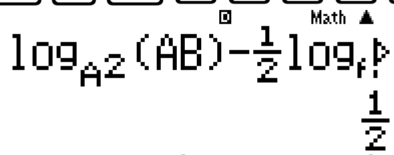
C. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$ **D.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta hiểu, nếu đáp án A đúng thì phương trình $\log_{a^2}(ab)-\frac{1}{2}\log_a b=0$ (1) với mọi giá trị của a,b thỏa mãn điều kiện a,b thực và $a\neq 1$. Ta chọn bất kì $A=1.15$ và $B=0.73$chả hạn. Nhập vế trái của (1) vào máy tính Casio rồi dùng lệnh tính giá trị $CALC$

log□ ALPHA (−) x^2 ▶ ALPHA (−) ALPHA °''' ▶ − ▭ 1 ▼ 2 ▶ log□ ALPHA (−) ▶ ALPHA °''' CALC 1 . 1 5 = 0 . 7 3 =

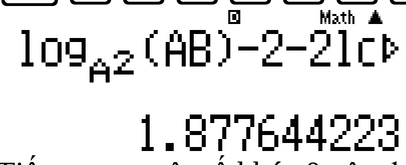


Máy tính báo kết quả là một số khác 0 vậy vế trái của (1) khác 0 hay đáp án **A** sai.

➢ Tương tự ta thiết lập phương trình cho đáp án **B** là $\log_{a^2}(ab)-2-2\log_a b=0$

Sử dụng chức năng CALC gán giá trị $A=1.15$ và $B=0.73$ cho vế trái của (2)

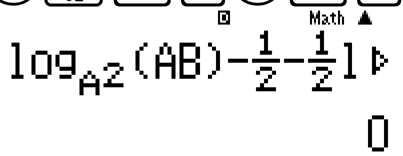
log□ ALPHA (−) x^2 ▶ ALPHA (−) ALPHA °''' ▶ − 2 − 2 log□ ALPHA (−) ▶ ALPHA °''' CALC 1 . 1 5 = 0 . 7 3 =



Tiếp tục ra một số khác 0 vậy đáp án **B** cũng sai

➢ Tiếp tục phép thử này và ta sẽ tìm được đáp án **D** là đáp án chính xác

log□ ALPHA (−) x^2 ▶ ALPHA (−) ALPHA °''' ▶ − ▭ 1 ▼ 2 ▶ − ▭ 1 ▼ 2 ▶ log□ ALPHA (−) ▶ ALPHA °''' CALC 1 . 1 5 = 0 . 7 3 =



❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Điều kiện $\begin{cases} a>0, a\neq 1 \\ b>0, b\neq 1 \end{cases}$

- Dễ thấy $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a ab=\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$

❖ **Bình luận :**

- Chúng ta chú ý phân biệt 2 công thức $\log_a x^m = m\log_a |x|$ và $\log_{a^n} x=\frac{1}{n}\log_{|a|} x$
- Theo kinh nghiệm làm nhiều trắc nghiệm của tác giả thì đáp án đúng thường có xu hướng xếp ở đáp án **C** và **D** nên ta nên thử ngược từ đáp án D trở xuống thì nhanh tìm được đáp án đúng nhanh hơn.

VD2-[Đề minh họa THPT Quốc gia 2017] Cho 2 số thực a,b với $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng

A. $\log_a b<1<\log_b a$ **B.** $1<\log_a b<\log_b a$

C. $\log_b a<\log_a b<1$ **D.** $\log_b a<1<\log_a b$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Chọn giá trị a,b thỏa mãn điều kiện a,b thực và $1<a<b$. Ta chọn $a=1.15$ và $b=2.05$

➢ Tính giá trị số hạng $\log_a b$

[log▫□] [ALPHA] [(−)] [▶] [ALPHA] [°'''] [CALC] [1] [•] [1] [5] [=] [2] [•] [0] [5] [=]

log_A(B)

5.136160681

Tính giá trị của số hạng $\log_b a$

[log▫□] [ALPHA] [°'''] [▶] [ALPHA] [(−)] [CALC] [2] [•] [0] [5] [=] [1] [•] [1] [5] [=]

log_B(A)

0.1946979587

➢ Rõ ràng $\log_b a<1<\log_a b \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Vì cơ số $a>1 \Rightarrow \log_a a<\log_a b \Leftrightarrow 1<\log_a b$ (1)
- Vì cơ số $b>1 \Rightarrow \log_b a<\log_b b \Leftrightarrow \log_b a<1$ (2)
- Kết hợp (1) và (2) ta có : $\log_b a<1<\log_a b \Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

❖ **Bình luận :**

- Chú ý tính chất của cơ số : Nếu $a>1$ thì $\log_a u>\log_a v \Leftrightarrow u>v$ nhưng nếu $0<a<1$ thì $\log_a u>\log_a v \Leftrightarrow u<v$

VD5-[THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng 2017] Cho hệ thức $a^2+b^2=7ab\ (a,b>0)$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $4\log_2\frac{a+b}{6}=\log_2 a+\log_2 b$ **B.** $2\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b$

C. $\log_2\frac{a+b}{3}=2(\log_2 a+\log_2 b)$ **D.** $2\log_2\frac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b$

GIẢI

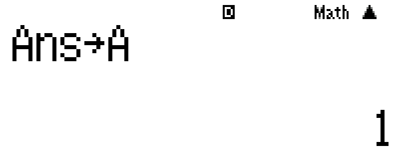
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Vì $a,b>0$ nên ta chọn $a=1$, khi đó b sẽ thỏa mãn hệ thức

$1+b^2=7b \Leftrightarrow b^2-7b+1=0 \Leftrightarrow b=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$. Chọn $b=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

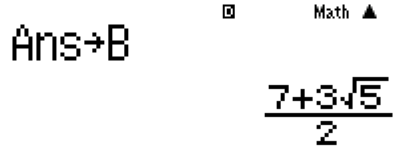
➢ Lưu $a=1$ vào biến A

[1] [=] [SHIFT] [RCL] [(−)]



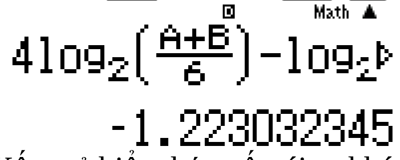
Lưu $b=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ vào biến B





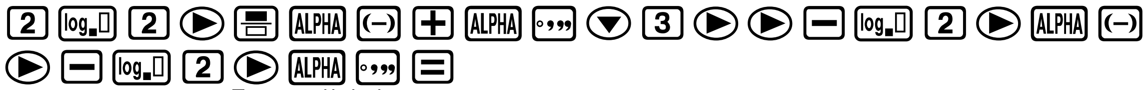
- Nếu đáp án **A** đúng thì $4\log_2\dfrac{a+b}{6}-\log_2 a-\log_2 b=0$ Để kiểm tra sự đúng sai của hệ thức này ta nhập vế trái vào máy tính Casio rồi nhấn nút = nếu kết quả ra 0 là đúng còn khác 0 là sai

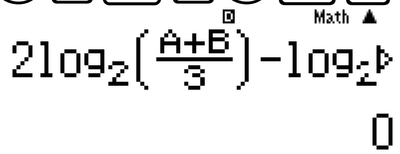




Kết quả biểu thức vế trái ra khác 0 vậy đáp án **A** sai

- Tương tự như vậy với các đáp án **B**, **C**, **D** và cuối cùng ta tìm được đáp án **D** là đáp án chính xác





❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Biến đổi $a^2+b^2=7ab \Leftrightarrow (a+b)^2=9ab \Leftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{9}\right)^2=ab$
- Logarit cơ số 2 cả 2 vế ta được : $\log_2\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2=\log_2 ab \Leftrightarrow 2\log_2\dfrac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Một bài toán biến đổi tương đối là zic zắc đòi hỏi học sinh phải nhuần nhuyễn các công thức và ác phép biến đổi Logarit

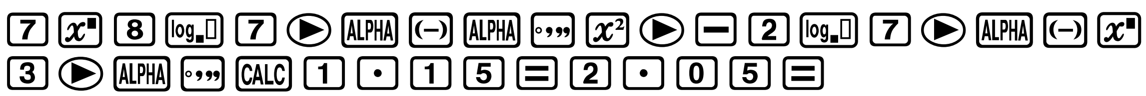
<u>VD4</u>-[Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang 2017] Nếu $\log_7 x=8\log_7 ab^2-2\log_7 a^3b,(a,b>0)$ thì x bằng :

A. a^4b^6 **B.** a^2b^{14} **C.** a^6b^{12} **D.** a^8b^{14}

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- Chọn giá trị a,b thỏa mãn điều kiện $a,b>0$ thực. Ta tiếp tục chọn $a=1.15$ và $b=2.05$
- Ta có $\log_7 x=8\log_7 ab^2-2\log_7 a^3b \Leftrightarrow x=7^{8\log_7 ab^2-2\log_7 a^3b}$



$7^{8\log_7(AB^2)-21c}$

30616.09068

Vậy ta biết được $x = 30616.09068$

- Tới đây ta chỉ cần tính giá trị các đáp án A, B, C, D xem đáp án nào bằng 30616.09068 là xong

  Và ta thấy đáp số B là đáp số chính xác

  [ALPHA] [(−)] [x^2] [ALPHA] [°'''] [$x^■$] [1] [4] [CALC] [1] [•] [1] [5] [=] [2] [•] [0] [5] [=]

  A^2B^{14}

  30616.09068

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Thu gọn $\log_7 x = \log_7 \left(ab^2\right)^8 - \log_7 \left(a^3b\right)^2 = \log_7 \left(a^8b^{16}\right) - \log_7 a^6b^2 = \log_7 \dfrac{a^8b^{16}}{a^6b^2} = \log_7 a^2b^{14}$
- Vì cơ số $b > 1 \ \Rightarrow \log_b a < \log_b b \Leftrightarrow \log_b a < 1$ (2)
- Kết hợp (1) và (2) ta có : $\log_b a < 1 < \log_a b \ \Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Chú ý tính chất của cơ số : Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v$ nhưng nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u < v$

<u>VD5</u>-[THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng 2017] Cho hàm số $f(x) = 3^{x^2}.4^x$. Khẳng định nào sau đây sai :

A. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x\log_3 2 > 2$

B. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2\log_2 3 + 2x > 2\log_2 3$

C. $f(x) > 9 \Leftrightarrow 2x\log 3 + x\log 4 > \log 9$

D. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2\ln 3 + x\ln 4 > 2\ln 3$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- Từ điều kiện đề bài, ta khai thác để tìm x : $f(c) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}.4^x - 9 > 0$ (1)
- Dùng Mode 7 để dò khoảng nghiệm của (1)

  [MODE] [7] [3] [$x^■$] [ALPHA] [)] [x^2] [▶] [×] [4] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [−] [9] [=] [=] [−] [9] [=] [1] [0] [=] [1] [=]

  Quan sát bảng giá trị (chú ý lấy phần $F(X) > 0$)

	X	F(X)
7	-3	298.54
8	-2	-3.937
9	-1	-8.25

  -3

  Thấy $x < -2$,.... Ta đặt $x < a$

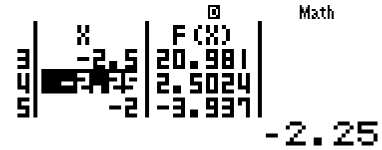
	X	F(X)
10	0	-8
11	1	3
12	2	1287

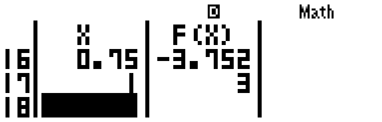
  2

  Thấy $x < 0$,.... Ta đặt $x > b$

- Để phóng to khoảng nghiệm và tìm chính xác a, b hơn ta chọn lại miền giá trị của X

  [AC] [=] [=] [−] [3] [=] [1] [=] [0] [•] [2] [5] [=]

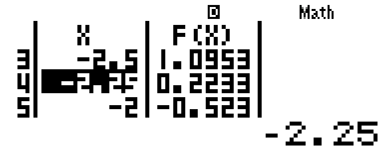


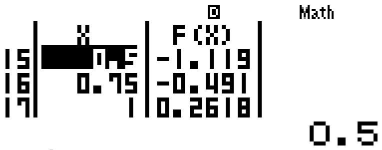


Vậy $x > 0.75$ và $x < -2.25$

- Việc cuối cùng là ta chỉ cần dò khoảng nghiệm xuất hiện ở đáp án **A**, **B**, **C**, **D** xem khoảng nào trùng với khoảng nghiệm trên thì là đúng.

MODE 7 ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) log□ 3 ▶ 2 ▶ − 2 = = − 3 =
1 = 0 . 2 5 =





Ta thấy đáp án **A** trùng khoảng nghiệm vậy đáp án **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Biến đổi $f(c) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2}.4^x > 9 \Leftrightarrow \frac{3^{x^2}}{9} > \frac{1}{4^x} \Leftrightarrow 3^{x^2-2} > 4^{-x}$
- Logarit cơ số 3 cả 2 vế ta được :

$\log_3\left(3^{x^2-2}\right) > \log_3\left(4^{-x}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2 > -x\log_3 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x\log_3 4 > 2$

❖ **Bình luận :**

- Một bài tự luận ta nhìn là biết dùng phương pháp logarit cả 2 vế luôn vì 2 số hạng trong bất phương trình khác cơ số và số mũ có nhân tử chung x

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Cho các số dương a,b,c và $a \neq 1$. Khẳng định nào đúng ?

A. $\log_a b + \log_a c = \log(b+c)$ **B.** $\log_a b + \log_a c = \log_a |b-c|$

C. $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ **D.** $\log_a b + \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

Bài 2-[Thi thử tính Lâm Đồng - Hà Nội 2017] Cho 2 số thực dương a,b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\log_a b\right)$ **B.** $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{3}(1-2\log_a b)$

C. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\log_a b\right)$ **D.** $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = 3\left(1-\frac{1}{2}\log_a b\right)$

Bài 3-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Nếu $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$ thì ta có :

A. $0 < a < b < 1$ **B.** $0 < b < a < 1$ **C.** $0 < a < 1 < b$ **D.** $1 < a < b$

Bài 4-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

A.Hàm số $y=e^{1999x}$ nghịch biến trên R **B.** Hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

C. $\log_3(a+b)=\log_3 a+\log_3 b$ **D.** $\log_a b.\log_b c.\log_c a=1$ với mọi $a,b,c\in R$

Bài 5-[Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang 2017] Cho $0<a<1$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau :

A. $\log_a x>0$ thì $0<x<1$ **B.** $\log_a x<0$ thì $x>1$

C. $x_1<x_2$ thì $\log_a x_1<\log_a x_2$ **D.** Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ có tiệm cận đứng là trục tung

Bài 6-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau ?

A. Hàm số $y=\log_a x$ với $0<a<1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

B. Hàm số $y=\log_a x$ với $a>1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

C. Hàm số $y=\log_a x$ $(0<a;a\neq 1)$ có tập xác định R

D. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ $(0<a;a\neq 1)$ đối xứng nhau qua trục hoành

Bài 7-[THPT HN-Amsterdam 2017] Cho a,b là các số thực dương và $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\log_{\sqrt{a}}(a^2+ab)=2+2\log_a(a+b)$ **B.** $\log_{\sqrt{a}}(a^2+ab)=4\log_a(a+b)$

C. $\log_{\sqrt{a}}(a^2+ab)=1+4\log_a b$ **D.** $\log_{\sqrt{a}}(a^2+ab)=4+2\log_a \text{b}$

Bài 8-[THPT Kim Liên – HN 2017] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** :

A. Hàm số $y=\log x$ là hàm số logarit

B. Hàm số $y=(3^{-1})^x$ là hàm số mũ

C. Hàm số $y=(\pi)^x$ nghịch biến trên R

D. Hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Bài 9-[Sở GD-ĐT Nam Định 2017] Cho $a>0;a\neq 1$ và $x;y$ là 2 số dương. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** ?

A. $\log_a \frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}$ **B.** $\log_a(x-y)=\frac{\log_a x}{\log_a y}$

C. $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ **D.** $\log_a(x-y)=\log_a x-\log_a y$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Cho các số dương a,b,c và $a\neq 1$. Khẳng định nào đúng ?

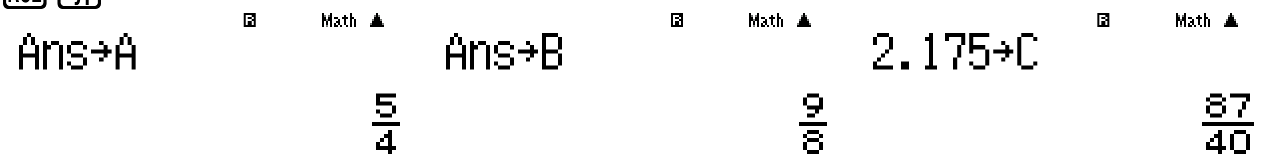
A. $\log_a b+\log_a c=\log(b+c)$ **B.** $\log_a b+\log_a c=\log_a|b-c|$

C. $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ **D.** $\log_a b+\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

GIẢI

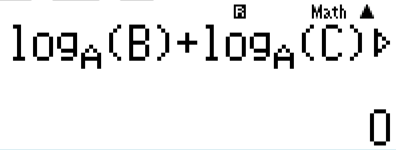
- Chọn $a=1.25,\ b=1.125, c=2.175$ rồi lưu các giá trị này vào $A,\ B, C$

1 . 2 5 = SHIFT RCL (–) 1 . 1 2 5 = SHIFT RCL °,,, 2 . 1 7 5 SHIFT RCL hyp



- Kiểm tra 4 đáp án và ta có đáp án **C** chính xác vì $\log_a b+\log_a c-\log_a(bc)=0$

log■□ ALPHA (−) ▶ ALPHA °'" ▶ + log■□ ALPHA (−) ▶ ALPHA hyp ▶ − log■□ ALPHA (−) ▶ ALPHA °'" ALPHA hyp =



Bài 2-[Thi thử tính Lâm Đồng - Hà Nội 2017] Cho 2 số thực dương a,b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_{a^3}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2}\log_a b\right)$ **B.** $\log_{a^3}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)=\dfrac{1}{3}(1-2\log_a b)$

C. $\log_{a^3}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2}\log_a b\right)$ **D.** $\log_{a^3}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)=3\left(1-\dfrac{1}{2}\log_a b\right)$

GIẢI

- Chọn $a=1.25,\ b=1.125$ rồi lưu các giá trị này vào $A,\ B$

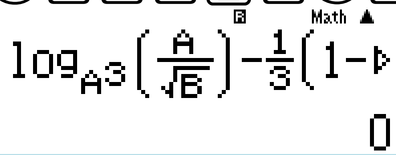
1 . 2 5 = SHIFT RCL (−) 1 . 1 2 5 = SHIFT RCL °'"





- Kiểm tra 4 đáp án và ta có đáp án **C** chính xác vì $\log_{a^3}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)-\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2}\log_a b\right)=0$

log■□ ALPHA (−) x■ 3 ▶ ▶ ⎕/⎕ ALPHA (−) ▼ √■ ALPHA °'" ▶ ▶ ▶ − ⎕/⎕ 1 ▼ 3 ▶ (1 − ⎕/⎕ 1 ▼ 2 ▶ log■□ ALPHA (−) ▶ ALPHA °'" ▶) =



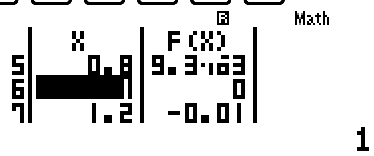
Bài 3-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Nếu $a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b\dfrac{1}{2}<\log_b\dfrac{2}{3}$ thì ta có :

A. $0<a<b<1$ **B.** $0<b<a<1$ **C.** $0<a<1<b$ **D.** $1<a<b$

GIẢI

- Từ $a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{5}}\Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{4}{5}}>0$. Tìm miền giá trị của a bằng chức năng MODE $7\Rightarrow 0<a<1$

MODE 7 ALPHA) x■ ⎕/⎕ 3 ▼ 4 ▶ ▶ − ALPHA) x■ ⎕/⎕ 4 ▼ 5 = = 0 = 3 = 0 . 2 =



- Từ $\log_b\dfrac{1}{2}<\log_b\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\log_b\dfrac{1}{2}-\log_b\dfrac{2}{3}<0$. Tìm miền giá trị của b bằng chức năng MODE $7\Rightarrow b>1$

MODE 7 log■□ ALPHA) ▶ ⎕/⎕ 1 ▼ 2 ▶ ▶ − log■□ ALPHA) ▶ ⎕/⎕ 2 ▼ 3 = = 0 = 3 = 0 . 2 =



Tóm lại $0<a<1<b \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 4-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

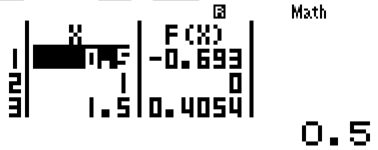
A. Hàm số $y=e^{1999x}$ nghịch biến trên R **B.** Hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

C. $\log_3(a+b)=\log_3 a+\log_3 b$ **D.** $\log_a b.\log_b c.\log_c a=1$ với mọi $a,b,c\in R$

GIẢI

- Khẳng định **A** có số mũ quá cao nên ta để lại sau cùng.
- Kiểm tra khẳng định **B** bằng chức năng MODE 7. Ta thấy $F(X)$ luôn tăng $\Rightarrow$ **B** chính xác





- Vì sao đáp án C, D sai thì ta chỉ việc chọn $a=1.25$, $b=-3.75$ là rõ luôn (vì điều kiện ràng buộc không có nên để đảm bảo tính tổng quát ta sẽ chọn một giá trị dương một giá trị âm)

Bài 5-[Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang 2017] Cho $0<a<1$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau :

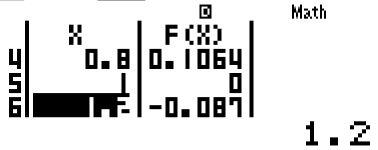
A. $\log_a x>0$ thì $0<x<1$ **B.** $\log_a x<0$ thì $x>1$

C. $x_1<x_2$ thì $\log_a x_1<\log_a x_2$ **D.** Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ có tiệm cận đứng là trục tung

GIẢI

- Cho $0<a<1$ vậy ta chọn $a=0.123$. Kiểm tra đáp số A ta dò miền nghiệm của phương trình $\log_a x>0$ xem miền nghiệm có trùng với $0<x<1$ không là xong. Để làm việc này ta sử dụng chức năng MODE 7

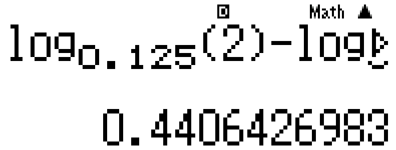




Quan sát bảng giá trị ta được miền nghiệm $0<x<1$ (phần làm cho $F(X)>0$) , miền nghiệm này giống miền $0<x<1$ vậy đáp số **A** đúng

- Tương tự cách kiểm tra đáp án A ta áp dụng cho đáp án **B** thì thấy **B** đúng
- Để kiểm tra đáp án **C** ta chọn hai giá trị $x_1=2<x_2=5$. Thiết lập hiệu $\log_a x_1-\log_a x_2$. Nếu hiệu này ra âm thì **C** đúng còn ra dương thì **C** sai. Để tính hiệu này ta sử dụng chức năng CALC





Vậy hiệu $\log_a x_1-\log_a x_2$ lớn hơn 0 hay $\log_a x_1>\log_a x_2$. Vậy đáp án **C** là sai

Bài 6-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau ?

A. Hàm số $y=\log_a x$ với $0<a<1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

B. Hàm số $y=\log_a x$ với $a>1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

C. Hàm số $y=\log_a x$ $(0<a;a\neq 1)$ có tập xác định R

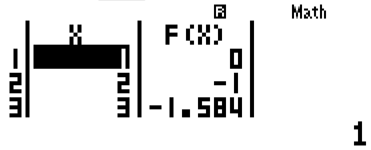
D. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ $(0<a;a\neq 1)$ đối xứng nhau qua trục hoành

GIẢI

- Câu **D** khó hiểu nhất nên ta ưu tiên đi xác định đúng sai các đáp án **A** , **B** , **C** trước
- Kiểm tra khẳng định đáp án **A** bằng chức năng MODE 7 với $a=0.5$ thỏa $9<a<1$. Ta thấy $F\left(X\right)$ giảm

  $\Rightarrow$ **A** sai $\Rightarrow$ Đáp án **B** cũng sai

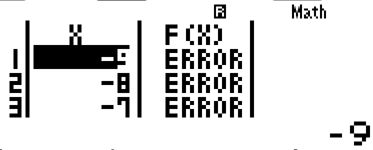
  MODE 7 log□□ 0 • 5 ▶ ALPHA) = = 1 = 1 0 = 1 =



- Kiểm tra khẳng định đáp án **C** bằng chức năng MODE 7. Ta thấy hàm số không xác định khi $x\le 0$

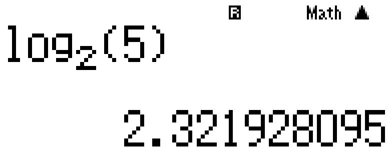
  $\Rightarrow$ Đáp án **C** cũng sai $\Rightarrow$ Tóm lại đáp án chính xác là **D**

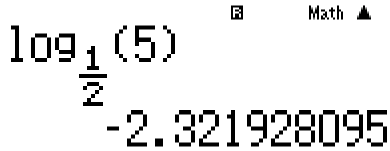
  MODE 7 log□□ 2 ▶ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



- Nếu tím hiểu vì sao hai đồ thị trên đối xứng nhau qua trục hoành thì ta phải hiểu ý nghĩa "nếu đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ đối xứng nhau qua trục hoành thì $f\left(x\right)=-g\left(x\right)$"

  Vậy ta sẽ chọn $a=2;x=5$ rồi tính $y=\log_2 5=2.32...$ và $y=\log_{\frac{1}{2}} x=-2.32...$ $\Rightarrow$ **D** đúng





PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 17. TÍNH NHANH BÀI TOÁN CÓ THAM SỐ MŨ – LOGARIT.

1) PHƯƠNG PHÁP

- **Bước 1 :** Cô lập m đưa về dạng $m \geq g(x)$ hoặc $m \leq g(x)$
- **Bước 2 :** Đưa bài toán ban đều về bài toán giải phương trình, bất phương trình đã học.

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất các các giá trị của m để phương trình $\log_2 x - \log_2(x-2) = m$ có nghiệm :

A. $1 \leq m < +\infty$ **B.** $1 < m < +\infty$ **C.** $0 \leq m < +\infty$ **D.** $0 < m < +\infty$

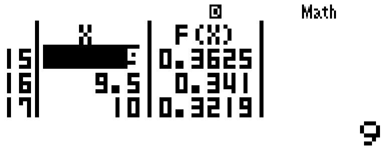
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đặt $\log_2 x - \log_2(x-2) = f(x)$ khi đó $m = f(x)$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì m thuộc miền giá trị của $f(x)$ hay $f(\min) \leq m \leq f(\max)$

➢ Tới đây bài toán tìm tham số m được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 2 End 10 Step 0.5

MODE 7 log□ 2 ▶ ALPHA) ▶ − log□ 2 ▶ ALPHA) − 2 = = 2 = 1 0 = 0 . 5 =



➢ Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy $f(10) \approx 0.3219$ vậy đáp số **A** và **B** sai. Đồng thời khi x càng tăng vậy thì $F(X)$ càng giảm. Vậy câu hỏi đặt ra là $F(X)$ có giảm được về 0 hay không.

Ta tư duy nếu $F(X)$ giảm được về 0 có nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm. Để kiểm tra dự đoán này ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

log□ 2 ▶ ALPHA) ▶ − log□ 2 ▶ ALPHA) − 2 SHIFT CALC 3 =



Máy tính Casio báo phương trình này không có nghiệm. Vậy dấu = không xảy ra

➢ Tóm lại $f(x) > 0 \Leftrightarrow m > 0$ và **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Điều kiện : $x > 2$
- Phương trình $\Leftrightarrow m = \log_2\left(\frac{x}{x-2}\right) \Leftrightarrow m = \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$
- Vì $x > 2$ nên $x - 2 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-2} > 1 \Rightarrow \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) > \log_2 1 = 0$

  Vậy $m = \log\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) > 0$

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo
- Chú ý : $m = f(x)$ mà $f(x) > 0$ vậy $m > 0$ một tính chất bắc cầu hay và thường xuyên gặp

VD2-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Tìm tham số m để phương trình $\ln x = mx^4$ có đúng một nghiệm :

A. $m = \frac{1}{4e}$ **B.** $m = \frac{1}{4e^4}$ **C.** $\frac{e^4}{4}$ **D.** $\frac{4}{\sqrt[4]{e}}$

GIẢI

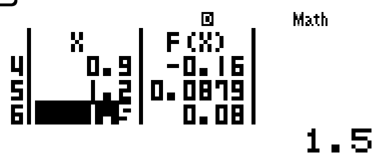
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Cô lập $m = \frac{\ln x}{x^4} = f(x)$ $(m > 0)$

Tới đây bài toán tìm m trở thành bài toán sự tương giao của 2 đồ thị. Để phương trình ban đầu có đúng 1 nghiệm thì hai đồ thị $y = \frac{\ln x}{x^4}$ và $y = m$ có đúng 1 giao điểm.

➢ Để khảo sát sự biến thiên của hàm $y = \frac{\ln x}{x^4}$ ta sử dụng chức năng MODE với thiết lập Start 0 End 5 Step 0.3

MODE 7 ▭ ln ALPHA)) ▼ ALPHA) $x^{■}$ 4 = = 0 = 5 = 0 • 3 =



Quan sát sự biến thiên của $F(X)$ ta thấy $f(0.3) \approx -148.6$ tăng dần tới $F(1.2) \approx 0.0875$ rồi giảm xuống $F(5) \approx 2,9.10^{-3} \approx 0$

➢ Ta thấy f cực đại ≈ 0.875 . Để hai đồ thị $y = \frac{\ln x}{x^4}$ và $y = m$ có đúng 1 giao điểm thì đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đường cong $y = \frac{\ln x}{x^4}$ tại điểm cực đại $\Rightarrow m \approx 0.875 \approx \frac{1}{4e}$

Vậy đáp án **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Điều kiện : $x > 2$
- Phương trình $\Leftrightarrow m = \log_2\left(\frac{x}{x-2}\right) \Leftrightarrow m = \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$
- Vì $x > 2$ nên $x - 2 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-2} > 1 \Rightarrow \log_2\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) > \log_2 1 = 0$

Vậy $m = \log\left(1 + \frac{2}{x-2}\right) > 0$

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo
- Chú ý : $m = f(x)$ mà $f(x) > 0$ vậy $m > 0$ một tính chất bắc cầu hay và thường xuyên gặp

VD3-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm m để phương trình $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$?

A. $-1\le m\le\frac{1}{4}$ **B.** $m<\frac{1}{4}$ **C.** $0<m\le\frac{1}{4}$ **D.** $m\le\frac{1}{4}$

GIẢI

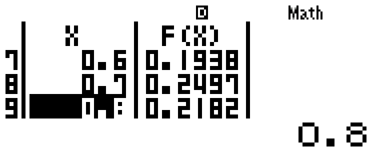
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Cô lập $m=-4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_{\frac{1}{2}}x$

Đặt $-4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_{\frac{1}{2}}x=f(x)$ khi đó $m=f(x)$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ thì m thuộc miền giá trị của $f(x)$ hay $f(\min)\le m\le f(\max)$ khi x chạy trên khoảng $(0;1)$

➢ Bài toán tìm tham số m lại được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 0 End 1 Step 0.1

[7] [−] [4] [×] [log□] [2] [▶] [√□] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [x²] [+] [log□] [□/□] [1] [▼] [2] [▶] [▶] [ALPHA] [)] [=] [=] [0] [=] [1] [=] [0] [.] [1] [=]

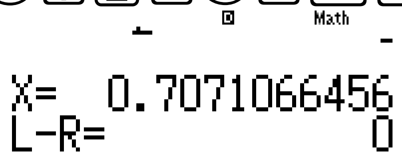


Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy $F(X)\le f(0.7)\approx0.2497\approx\frac{1}{4}$ vậy đáp án đúng chỉ có thể là **B** hoặc **D**

➢ Tuy nhiên vấn đề là $m=\frac{1}{4}$ có nhận hay không. Nếu nhận thì đáp số D là đúng, nếu không nhận thì đáp số B là đúng.

Để kiểm tra tính chất này ta thế $m=\frac{1}{4}$ vào phương tình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{4}=0$ rồi dùng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để xem có nghiệm x thuộc khoảng $(0;1)$ không là xong.

[4] [×] [log□] [2] [▶] [√□] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [x²] [−] [log□] [□/□] [1] [▼] [2] [▶] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [+] [□/□] [1] [▼] [4] [SHIFT] [CALC] [0] [.] [5] [=]



Máy tính Casio báo có nghiệm $x=0.7071...$ thuộc khoảng $(0;1)$. Vậy dấu [=] có xảy ra

➢ Tóm lại $m\le\frac{1}{4}$ và **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Điều kiện : $x>0$

▪ Ta có $m=-4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_{\frac{1}{2}}x=-4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2-\log_2 x=-\left(\log_2 x\right)^2-\log_2 x$

Vậy $m=\frac{1}{4}-\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow\log_2 x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\log_2 x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

❖ **Bình luận :**

- Để xem dấu = xảy ra hay không thì ta sẽ thử cho dấu = xảy ra và sử dụng chức năng dò nghiệm. Nếu xuất hiện nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài thì dấu = xảy ra.

VD4-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\log_{\frac{1}{2}}|x-2|-\log_{\frac{2}{3}}(x+1)=m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m>3$ **B.** $m<2$ **C.** $m>0$ **D.** $m=2$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

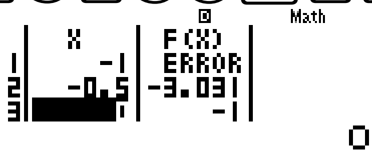
➢ Đặt $\log_{\frac{1}{2}}|x-2|-\log_{\frac{2}{3}}(x+1)=f(x)$ khi đó $m=f(x)$ (1).

Bài toán tìm tham số m trở lại bài toán sự tương giao của 2 đồ thị. Để phương trình ban đầu có 3 nghiệm thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt

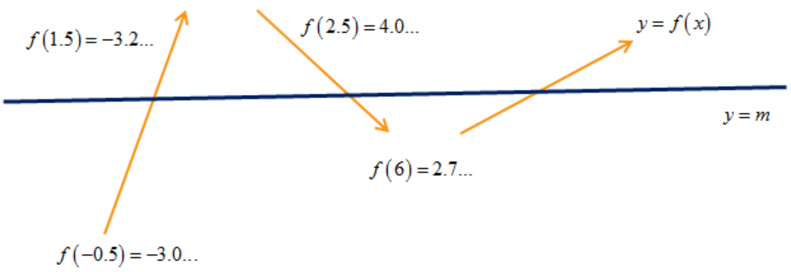
➢ Ta có $y=m$ là đường thẳng song song với trục hoành

➢ Để khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị TABLE với thiết lập Start -1 End 8 Step 0.5

MODE 7 log▫□ ▭ 1 ▼ 2 ▶ ▶ SHIFT hyp ALPHA) − 2 ▶ ▶ − log▫□ ▭ 2 ▼ 3 ▶ ▶ ALPHA) + 1 = = − 1 = 8 = 0 . 5 =



Quan sát bảng giá trị ta mô tả được sự biến thiên của hàm $f(x)$ như sau



➢ Rõ ràng $m<2$ thì 2 đồ thị trên cắt nhau tại 1 điểm $\Rightarrow$ Đáp số **B** sai

$m=2$ cũng cắt nhau tai 1 điểm $\Rightarrow$ Đáp án **C** và **D** cùng sai

Vậy đáp số chính xác là **A**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán thể hiện được sức mạnh của máy tính Casio đặc biệt trong việc khảo sát các hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối. Cách tự luận rất rắc rối vì phải chia làm nhiều khoảng để khảo sát sự biến thiên nên tác giả không đề cập.

VD5-[Thi HK1 THPT Chu Văn An -HN năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x-3^{x+2}+m=0$ có hai nghiệm trái dấu

A. $m<0$ **B.** $0<m<8$ **C.** $m\in\left(0;\frac{81}{4}\right)$ **D.** Không tồn tại m

GIẢI

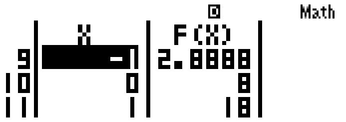
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Cô lập $m=-9^x+3^{x+2}$

Đặt $-9^x+3^{x+2}=f(x)$ khi đó $m=f(x)$ (1) . Bài toán quy về dạng tương giao của 2 đồ thị.

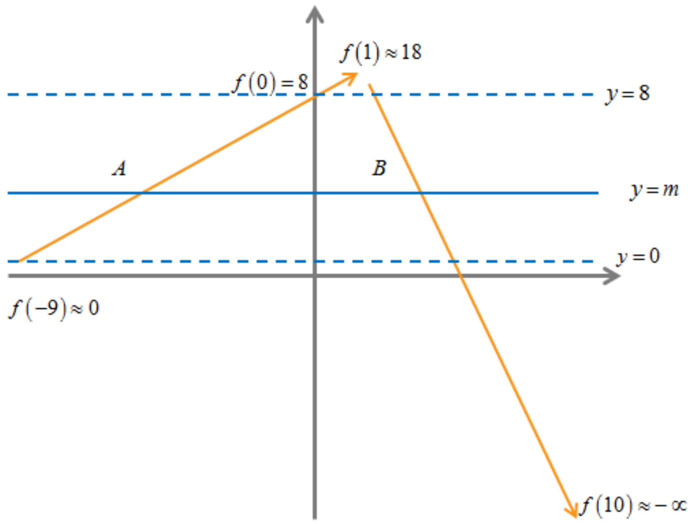
Để khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường đi của đồ thị ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với thiết lập Start -9 End 10 Step 1.

MODE 7 − 9 $x^{■}$ ALPHA) ▶ + 3 $x^{■}$ ALPHA) + 2 = = − 9 = 1 0 = 1 =



- 1

➢ Quan sát bảng giá trị ta mô tả đường đi của đồ thị hàm $y=f\left(x\right)$ như sau :



Nhìn sơ đồ ta thấy để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị $y=f\left(x\right)$ tại 2 điểm A và B có hoành độ trái dấu thì $0<m<8$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Đặt $3^x=t\ \left(t>0\right)$. Phương trình $\Leftrightarrow f\left(t\right)=t^2-9t+m=0$ (1)
- Khi $x>0$ thì $t>3^0=1$. Khi $x<0$ thì $t<1$. Vậy để phương trình ban đầu có 2 nghiệm trái dấu thì phương trình (1) có 2 nghiệm dương thỏa mãn $t_1<1<t_2$

Vậy $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\\af\left(1\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}81-4m>0\\9>0\\m>0\\1.\left(m-8\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<8$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \log_2 x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Hai giao điểm có hoành độ trái dấu thì phải nằm về 2 phía của trục tung
- Đáp án **A** sai vì 2 đồ thị chỉ cắt nhau tại 1 điểm nằm ở bên phải trục tung
- Nếu $18>m>8$ thì 2 đồ thị cắt nhau tại 2 điểm đều nằm bên phải trục tung vậy đáp án **C** sai.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

<u>Bài 1</u>-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m=3$ **B.** $m>2$ **C.** $2\le m\le 3$ **D.** $2<m<3$

<u>Bài 2</u>-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm ?

A. 20 **B.** 35 **C.** 30 **D.** 25

Bài 3-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x-2.81^x=m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

A. $m>0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\sqrt{2} \\ m\ge \sqrt{2} \end{array}\right.$ **C.** Với mọi m **D.** Không tồn tại m

Bài 4-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x-\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. $m>1$ **B.** $m<0$ **C.** $0<m\le 1$ **D.** $m\le 1$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

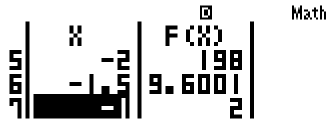
A. $m=3$ **B.** $m>2$ **C.** $2\le m\le 3$ **D.** $2<m<3$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

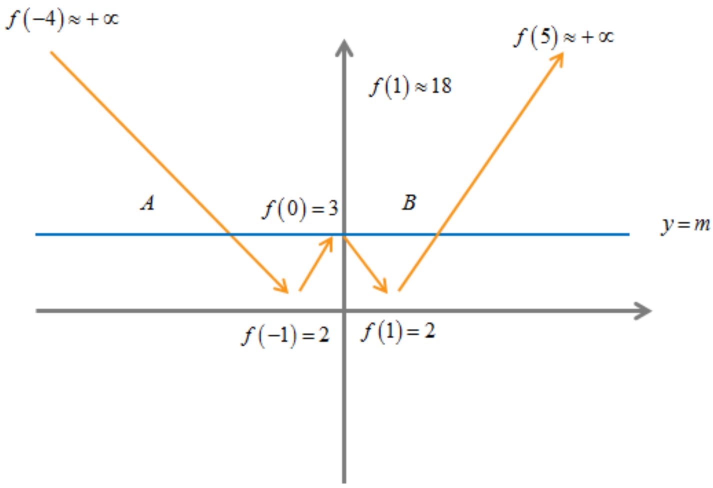
- Đặt $f(x)=4^{x^2}-2^{x^2+2}+6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -4 End 5 Step 0.5

MODE 7 4 x■ ALPHA) x² ▶ − 2 x■ ALPHA) x² + 2 ▶ + 6 = = − 4 = 5 = 0 . 5 =



- 1

- Quan sát bảng biến thiên ta vẽ đường đi của hàm số



Rõ ràng $y=3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt vậy đáp án A là chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Đặt $2^{x^2}=t$ khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow t^2-4t+6-m=0$ (1)
- Ta để ý tính chất sau : Nếu $t=1$ thì $x=0$ còn nếu $t>0; t\ne 1$ thì $x=\pm\sqrt{\log_2 t}$. Vậy để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt thì (1) có 2 nghiệm trong đó có 1 nghiệm $t=0$ và 1 nghiệm $t>0$

- Với $t=1 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow 3-m=0 \Leftrightarrow m=3$

Bài 2-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm ?

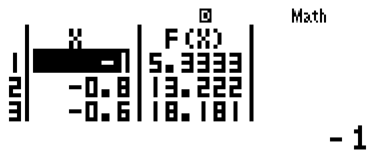
A. 20 **B.** 35 **C.** 30 **D.** 25

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Cô lập m ta được $m=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$
- Đặt $f(x)=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -1 End 1 Step 2

MODE 7 ▭/▭ 2 5 $x^{■}$ 1 + √■ 1 − ALPHA) x^2 ▶ ▶ − 2 × 5 $x^{■}$ 1 + √■ 1 − ALPHA) x^2 ▶ ▶ + 1 ▼ 5 $x^{■}$ 1 + √■ 1 − ALPHA) x^2 ▶ ▶ − 2 = = − 1 = 1 = 0 • 2 =



- Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)\le f(0)=25.043...$ hay $m\le f(0)$ vậy m nguyên dương lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ D là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Điều kiện $1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Ta có $1-x^2\le 1 \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-x^2}\le 2$

  Đặt $5^{1+\sqrt{1-x^2}}=t \Rightarrow 5^1\le t\le 5^2 \Leftrightarrow 5\le t\le 25$
- Phương trình ban đầu trở thành $t^2-(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}=f(t)$

  Vậy $m\le f(\max)$
- Khảo sát sự biến thiên của hàm $f(x)$ trên miền $(5;25)$ ta được $f(\max)=f(25)=25.043$

  Vậy m nguyên dương lớn nhất là 25

Bài 3-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x-2.81^x=m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

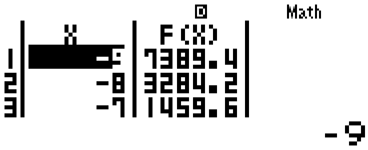
A. $m>0$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\sqrt{2} \\ m\ge \sqrt{2}\end{array}\right.$ **C.** Với mọi m **D.** Không tồn tại m

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Cô lập m ta được $m=\dfrac{5.16^x-2.81^x}{36^x}$
- Đặt $f(x)=\dfrac{5.16^x-2.81^x}{36^x}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -9 End 10 Step 1

MODE 7 ▭/▭ 5 × 1 6 $x^{■}$ ALPHA) ▶ − 2 × 8 1 $x^{■}$ ALPHA) ▼ 3 6 $x^{■}$ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ luôn giảm hay hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến.

Điều này có nghĩa là đường thẳng $y=m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm $\Rightarrow$ **C** chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow 5.16^x-m.36^x-2.81^x=0$ (1)

Chia cả 2 vế của (1) cho 81^x ta được : $5.\left(\frac{16}{81}\right)^x-m.\left(\frac{36}{81}\right)^x-2=0\Leftrightarrow 5\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-m\left(\frac{4}{9}\right)^x-2=0\,(2)$

Đặt $\left(\frac{4}{9}\right)^x=t\quad(t>0)$ $(2)\Leftrightarrow 5t^2-mt-2=0$ (3)

Phương trình (3) có $5.(-2)=10<0$ tức là (3) luôn có 2 nghiệm trái dấu

$\Rightarrow$ (3) luôn có 1 nghiệm dương 1 nghiệm âm

$\Rightarrow$ Phương trình ban đầu luôn có 1 nghiệm với mọi m

Bài 4-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x-\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

A. $m>1$ **B.** $m<0$ **C.** $0<m\le 1$ **D.** $m\le 1$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

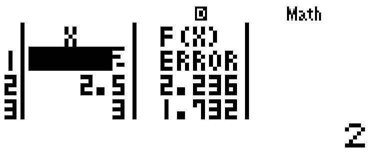
- Điều kiện : $x>2$. Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{x-2}\right)=2\log_3 m\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{x}{x-2}\right)=\log_3 m$

$\Leftrightarrow \log_3\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\log_3 m\Leftrightarrow m=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

Để phương trình ban đầu vô nghiệm thì đường thẳng $y=m$ không cắt đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start 2 End 10 Step 0.5

MODE 7 √■ ▭/▭ ALPHA) ▼ ALPHA) − 2 = = 2 = 1 0 = 0 • 5 =



- Để khảo sát chính xác hơn ta tính giới hạn của hàm $f(x)$ khi x tiến tới 2 cận là 2 và $+\infty$

√■ ▭/▭ ALPHA) ▼ ALPHA) − 2 CALC 1 0 x■ 9) =



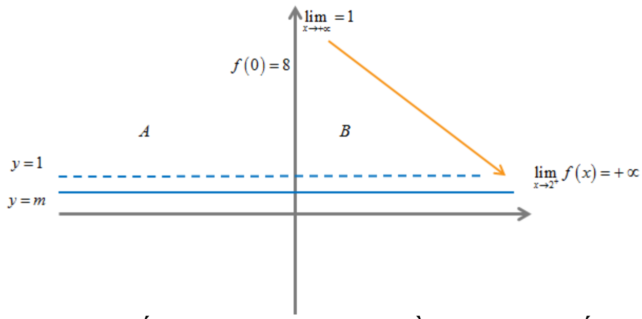
Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}=1$

√■ ▭/▭ ALPHA) ▼ ALPHA) − 2 CALC 2 + 0 • 0 0 0 0 0 0 1 =



Vậy $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\propto$

- Quan sát bảng giá trị và 2 giới hạn ta vẽ đường đi cả đồ thị hàm số $y = f(x)$ và sự tương giao



Ta thấy ngay $m \le 1$ thì 2 đồ thị không cắt nhau hay phương trình ban đầu vô nghiệm

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 18. TÌM NHANH NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ.

1) MỞ ĐẦU VỀ NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Hôm nay mình nhận được 1 câu hỏi của thầy Bình Kami, một câu hỏi về tính quãng đường của một vật chuyển động thẳng biến đổi đều, câu hỏi đã được xuất hiện trong đề thi minh họa của BGD-ĐT năm 2017

[Câu 24 đề minh họa 2017] Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\left(m/s\right)$ thì người lái đạp phanh , từ thời điểm đó , ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=-2t+10\ \left(m/s\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây , kể từ lúc bắt đầu đạp phanh . Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

A. $15m$ **B.** $20m$ **C.** $25m$ **D.** $40m$

Xem nào, khi xe dừng lại vận tốc sẽ về 0 hay $0=-2t+10$ *vậy thời gian xe còn di chuyển thêm được là* $5(s)$. *Vậy quãng đường* $s=v.t=10.5=50\left(m\right)$ *mà xe chạy chậm dần vậy sẽ phải nhỏ hơn* $50\left(m\right)$ *, chắc là* $40\left(m\right)$ *phải không nhỉ ?*

Để chắc chắn, có lẽ mình phải lập 1 bảng mô tả quãng đường :

Mốc 0	*Hết giây thứ 1*	*Hết giây thứ 2*	*Hết giây thứ 3*	*Hết giây thứ 4*	*Hết giây thứ 5*
Vận tốc	$10\to 8$	$8\to 6$	$6\to 4$	$4\to 2$	$2\to 0$
Quãng đường	*9*	*7*	*5*	*3*	*1*

Như vậy tổng quãng đường xe đi được khi vận tốc giảm đến 0 là $9+7+5+3+1=25\left(m\right)$

Cách này có vẻ tin cậy hơn nhiều, nhưng mất của mình thời gian đến hơn 2 phút !!! Vậy còn cách gì nhanh hơn không nhỉ ?

Thầy BìnhKami e làm được rồi.

Minh Nguyệt đã giải được bài toán và tìm ra đáp án chính xác $25\left(m\right)$, rất tốt về mặt kết quả nhưng về mặt thời gian tính lại hơi lâu. Bài này ta có thể hoàn thành trong thời gian $20\left(s\right)$ nhờ 1 công cụ gọi là tích phân

$$S=\int_0^5\left(-2t+10\right)dt=25\left(m\right)$$

Ta bấm máy tính như sau :

Khởi động chức năng tính tích phân : [∫▭]

Nhập biểu thức cần tính tích phân và nhấn nút [=]

[(] [−] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [0] [)] [▼] [0] [▲] [5] [=]

$\int_0^5(-2X+10)dx$

25

Máy tính sẽ cho chúng ta kết quả là $25\left(m\right)$. Chỉ mất $20\left(s\right)$ thật tuyệt vời phải không nào !!!

Thầy BìnhKami, Tích phân là công cụ gì mà hay vậy ạ ???

Tích phân là 1 trong những công cụ tuyệt vời nhất mà nền toán học đã tạo ra , sử dụng tích phân có thể tính được quãng đường, vận tốc của 1 vật thể hoặc có thể tính được diện tích của 1 hình rất phức tạp ví dụ như hình tròn, hình tam giác, hình e líp … thì còn có công thức nhưng diện tích của mặt ao hồ hình thù phức tạp thì chỉ có tích phân mới xử lý được, hoặc tính thể tích của 1 khoang tầu thủy có hình dạng phức tạp thì lại phải nhờ đến tích phân.

Tích phân hiện đại được nhà toán học Anh Isac Newton và nhà toán học Pháp Laibơnit công bố khoảng cuối thế kỉ 17 nhưng người đặt nền móng cho sự hình thành và phát triển của Tích phân là nhà toán học, vật lý học, triết học, thiên văn học thiên tài người Hi Lạp Ac-si-met

Tích phân chia làm 2 dạng : Tích phân bất định (không cận) thường được biết tới tên là Nguyên hàm và Tích phân xác định (có cận) thường được biết đến với tên Tích phân mà các e sẽ được học ở học kì 2 lớp 12.

2) CÁCH TÍNH NGUYÊN HÀM

- Xây dựng công thức tính nguyên hàm :

  Ta có $\left(x^5\right)'=5x^4$ vậy ta nói nguyên hàm của $5x^4$ là x^5 kí hiệu $\int 5x^4dx=x^5+C$

  Tương tự $(\sin x)'=\cos x$ vậy ta nói nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$, kí hiệu $\int \cos xdx=\sin x+C$

  Tổng quát : $\int f(x)dx=F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

VD1-[Sách BT Nâng cao 12] Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào :

A. $f(x)=e^{2x}$ **B.** $f(x)=2x.e^{2x}$ **C.** $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ **D.** $f(x)=x^2e^{x^2}-1$

GIẢI

Thưa thầy, bài này e làm được ạ !

- *Đầu tiên e tính đạo hàm của* $F(x)$, *vì* $F(x)$ *là một hàm hợp của* e *nên em áp dụng công thức* $\left(e^u\right)'=e^u.u'$ *ạ .*
- *Khi đó :* $F'(x)=\left(e^{x^2}\right)'=e^{x^2}.\left(x^2\right)'=2x.e^{x^2}$
- *Vậy* $F(x)$ *là nguyên hàm của hàm của hàm* $f(x)=2x.e^{x^2}$ *và ta chọn đáp án* ***B*** *ạ.*

VD2-[Đề thi minh họa ĐHQG 2016] Nguyên hàm của hàm số $y=x.e^{2x}$ là :

A. $2e^{2x}(x-2)+C$ **B.** $\dfrac{1}{2}e^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$

C. $2e^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$ **D.** $\dfrac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

GIẢI

Thưa thầy, chúng ta sẽ thử lần lượt , với đáp án A thì $F(x)=2e^{2x}(x-2)$ *. Nhưng việc tính đạo hàm của* $F(x)$ *là* $2e^{2x}(x-2)$ *thì e thấy khó quá ạ , e quên mất công thức ạ !!*

Trong phòng thi gặp nhiều áp lực, nhiều khi chúng ta đột nhiên bị quên công thức đạo hàm hay bản thân chúng ta chưa học phần này thì làm sao ?? Thầy sẽ cho các e một thủ thuật Casio để các e quên công thức vẫn biết đâu là đáp án đúng :

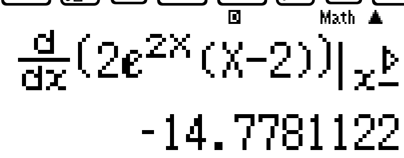
- Ta biết $F'(x)=f(x)$ việc này đúng với mọi x thuộc tập xác định
- Vậy sẽ đúng với $x=1$ chẳng hạn . Khi đó $F'(1)=f(1)$
- Tính giá trị $f(1)=7,3890...$

  ALPHA) ALPHA ×10^x x■ 2 ALPHA) CALC 1 =



➢ Tính đạo hàm $F'(1)$ với từng đáp án , bắt đầu từ đáp án A là $F(x)=2e^{2x}(x-2)$

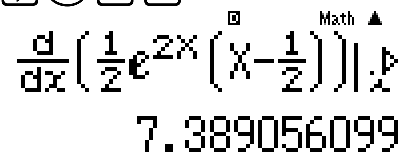
SHIFT ∫□ 2 ALPHA ×10^x x^■ 2 ALPHA) ▶ (ALPHA) − 2) ▶ 1 =



Vậy ta được kết quả $F'(1)=-14.7781...$ đây là 1 kết quả khác với $f(1)\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

➢ Tính đạo hàm $F'(1)$ của đáp án B với $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

SHIFT ∫□ ▭ 1 ▼ 2 ▶ ALPHA ×10^x x^■ 2 ALPHA) ▶ (ALPHA) − ▭ 1 ▼ 2 ▶) ▶ 1 =



Ta thu được kết quả giống hệt $f(x)$ vậy $F'(x)=f(x)$ hay $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ là nguyên hàm của $f(x)\Rightarrow$ Đáp án **B** là đáp án chính xác

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x)+C$ cũng là 1 nguyên hàm của hàm $f(x)$ vì $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$
- Việc sử dụng Casio dể tính nguyên hàm đặc biệt hữu ích đối với với những bài phức tạp, áp dụng nhiều công thức tính đạo hàm cùng một lúc , và tránh nhầm lẫn trong việc tính toán !!

<u>VD3</u>-[Câu 23 Đề minh họa năm 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$:

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$ **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$ **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

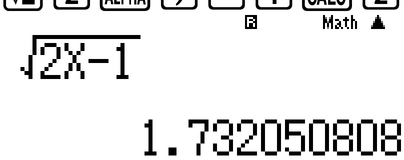
➢ Nhắc lại 1 lần nữa công thức quan trọng của chúng ta. Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x)=f(x)$

Khi đó ta chọn 1 giá trị $x=a$ bất kì thuộc tập xác định thì $F(a)=f(a)$

➢ Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn (thỏa điều kiện $2x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$)

Khi đó $f(2)=1,732...$

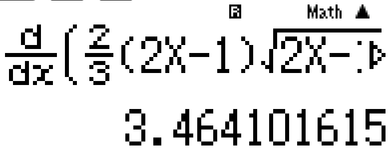
√■ 2 ALPHA) − 1 CALC 2 = S⇔D



- Theo đúng quy trình ta sẽ chọn đáp án $F(x)$ ở 4 đáp án **A**, **B**, **C**, **D** nếu đáp án nào thảo mãn $F'(2)=f(2)=1,732...$

  Thử với đáp án **A** khi đó $F(x)=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

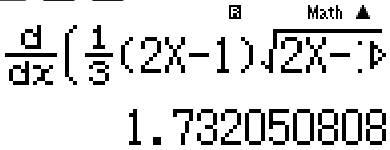
  SHIFT ∫□ □ 2 ▼ 3 ▶ (2 ALPHA) − 1) √□ 2 ALPHA) − 1 ▶ ▶ 2 =



  Vậy $F'(2)=3,4641...$ là một giá trị khác $f(2)=1,732...$ điều đó có nghĩa là điều kiện $F'(x)=f(x)$ không được đáp ứng. Vậy đáp án **A** là sai .

- Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án **B**. Khi này $F(x)=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

  SHIFT ∫□ □ 1 ▼ 3 ▶ (2 ALPHA) − 1) √□ 2 ALPHA) − 1 ▶ ▶ 2 =



  Ta được $F'(2)=1,732...$ giống hệt $f(2)=1,732...$ có nghĩa là điều kiện $F'(x)=f(x)$ được thỏa mãn. Vậy đáp án chính xác là **B**

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Dựa vào đặc điểm của hàm $f(x)$ ta thấy $\sqrt{2x-1}$ về mặt bản chất sẽ có dạng $(2x-1)^{\frac{1}{2}}$. Ta nghĩ ngay đến công thức đạo hàm $(u^n)'=n.u^{n-1}.u'$

  +)Trong công thức đạo hàm này số mũ của u bị giảm đi 1. Vậy hàm $F(x)$ có số mũ lớn hơn hàm $f(x)$ là 1 đơn vị. Vậy $F(x)$ phải có số mũ là $\frac{3}{2}$

  +)Vậy chỉ có đáp án **A** hoặc **B** là thỏa mãn vì $(2x-1)\sqrt{2x-1}=(2x-1)^{\frac{3}{2}}$

- Ta thực hiện phép đạo hàm $\left[(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]'=\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}(2x-1)'=3\sqrt{2x-1}$

- Cân bằng hệ số ta được $\frac{1}{3}\left[(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]'=\sqrt{2x-1}$. Điều này có nghĩa nguyên hàm

  $F(x)=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}\Rightarrow$ **B** là đáp án đúng.

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Nếu chúng ta có một chút kiến thức cơ bản về đạo hàm thì việc sử dụng máy tính Casio để tìm đáp án sẽ nhẹ nhàng hơn. Chúng ta chỉ việc thử với đáp án **A** và **B** vì 2 đáp án này mới có số mũ là $\frac{3}{2}$
- Điều đặc biệt của dạng này là số mũ của nguyên hàm $F(x)$ lúc nào cũng lớn hơn số mũ của hàm số $f(x)$ là 1 đơn vị.

+) Chúng ta có thể áp dụng 1 cách linh hoạt. Ví dụ tìm nguyên hàm của hàm số $y=\frac{m}{\sqrt{x}}$ thì cũng vô cùng đơn giản. Ta thấy $y=m.\frac{1}{\sqrt{x}}$ về mặt bản chất thì $\frac{1}{\sqrt{x}}$ là x mũ $-\frac{1}{2}$ vậy chắc chắn nguyên hàm phải là x mũ $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ hay là $\sqrt{x}$

+) Ta xét đạo hàm gốc $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (*) Việc còn lại chỉ là cân bằng hệ số, để tạo thành $\frac{m}{\sqrt{x}}$ ta nhân cả 2 vế của (*) với $2m$ là xong. Khi đó $\left(2m\sqrt{x}\right)'=\frac{m}{\sqrt{x}}$ Thật đơn giản phải không !!

VD4- Một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2+3x-2}{x}$ là :

A. $2x^2+3x-2\ln x$

B. $\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\ln x$

C. $\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+1$

D. $\frac{x^2+x}{x^2}$

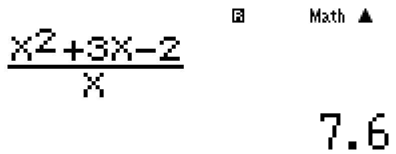
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta chọn 1 giá trị x thuộc tập xác định $\left(x\neq 0\right)$ là $x=5$

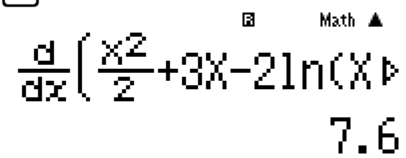
Khi đó $f\left(5\right)=7.6$

[▭/▭] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [−] [2] [▼] [ALPHA] [)] [CALC] [5] [=] [S⇔D]



➢ Với đáp án C ta có $F\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+1$ có

[SHIFT] [d/dx] [▭/▭] [ALPHA] [)] [x²] [▼] [2] [▶] [+] [3] [ALPHA] [)] [−] [2] [ln] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [▶] [5] [=]



Ta được $F'\left(5\right)=7.6=f\left(5\right)$. Vậy đáp án **C** là đáp án chính xác.

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Hàm $f\left(x\right)=\frac{x^2+3x-2}{x}$ có tên gọi là hàm phân thức hữu tỉ với bậc của tử là bậc 2 lớn hơn bậc của mẫu là bậc 1
- Phương pháp giải : Thực hiện 1 phép chia tử số cho mẫu số ta được: $f\left(x\right)=x+3-\frac{2}{x}$. Khi đó hàm số trở thành dạng đơn giản và ta dễ dàng tìm được nguyên hàm.

+) Có $\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)'=x+3$ vậy $\frac{x^2}{2}+3x$ là nguyên hàm của $x+3$

+) Có $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Cân bằng hệ số ta có : $(-2\ln x)'=-\frac{2}{x}$ vậy $-2\ln x$ là nguyên hàm của $-\frac{2}{x}$

Tổng kết $\left(\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x\right)'=x+3-\frac{2}{x}=\frac{x^2+3x-2}{x}$

Hay $\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x$ là một nguyên hàm cần tìm thì $\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+5$ cũng là một nguyên hàm

- Cân bằng hệ số ta được $\frac{1}{3}\left[(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]'=\sqrt{2x-1}$. Điều này có nghĩa nguyên hàm

  $F(x)=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$ $\Rightarrow$ **B** là đáp án đúng.

❖ **Bình luận :**

- Tìm nguyên hàm của 1 hàm phân thức hữu tỉ là 1 dạng toán hay nếu chúng ta biết nguyên tắc tư duy, và nếu không biết thì sẽ rất khó khăn.
- Ta phải nhớ thế này, nếu ***phân thức hữu tỉ có bậc ở tử lớn hơn hoặc bằng bậc ở mẫu thì ta sẽ thực hiện 1 phép chia tử số cho mẫu số*** thì sẽ thu được 1 hàm số cực kì dễ tính nguyên hàm.
- Ngoài ra còn 1 dạng hay nữa khi ***phân thức hữu tỉ có mẫu số phân tích được thành nhân tử thì ta sẽ xử lý thế nào ?*** Mời các bạn xem ví dụ tiếp theo .

VD5 - Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{4}{x^2-4}$ là :

A. $\ln(x-2)-2\ln(x+2)+C$ **B.** $2\ln(x-2)+\ln(x+2)+C$

C. $\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$ **D.** $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta chọn 1 giá trị x thuộc tập xác định $(x\neq 0)$ là $x=5$

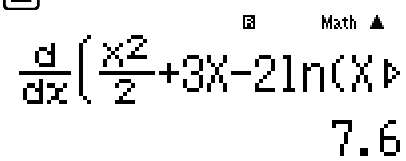
Khi đó $f(5)=7.6$

[▭/▭] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [−] [2] [▼] [ALPHA] [)] [CALC] [5] [=] [S⇔D]



➢ Với đáp án C ta có $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+1$ có

[SHIFT] [d/dx] [▭/▭] [ALPHA] [)] [x²] [▼] [2] [▶] [+] [3] [ALPHA] [)] [−] [2] [ln] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [▶] [5] [=]



Ta được $F'(5)=7.6=f(5)$. Vậy đáp án **C** là đáp án chính xác.

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Hàm $f(x)=\frac{4}{x^2-4}$ có tên gọi là hàm phân thức hữu tỉ có mẫu số phân tích được thành nhân tử
- Phương pháp giải : Chia phân thức phức tạp ban đầu thành các phân thức phức tạp

  +) Có $\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}$

  +) Ta sẽ tách phân thức lớn này thành 2 phân thức nhỏ đơn giản : $\frac{4}{x^2-4}=m.\frac{1}{x-2}+n.\frac{1}{x+2}$

  +) Để tách được ta lại dùng ***phương pháp hệ số số bất định***:

  $\frac{4}{x^2-4}=m.\frac{1}{x-2}+n.\frac{1}{x+2}\Leftrightarrow\frac{4}{x^2-2}=\frac{m(x+2)+n(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

  $\Leftrightarrow 4=m(x-2)+n(x+2)\Leftrightarrow 0x+4=x(m+n)+2m-2n\Leftrightarrow\begin{cases}0=m+n\\4=2m-2n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=-1\end{cases}$

  Vậy $\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$
- Thành công trong việc đưa về 2 phân số đơn giản, ta nhớ đến công thức

  $(\ln x)'=\frac{1}{x},(\ln u)=\frac{1}{u}.u'$

  Dễ dàng áp dụng :

  $\left[\ln(x-2)\right]'=\frac{1}{x-2}.(x-2)'=\frac{1}{x-2}$ và $\left[\ln(x+2)\right]'=\frac{1}{x+2}.(x+2)'=\frac{1}{x+2}$

  Tổng hợp $\left[\ln(x-2)-\ln(x+2)\right]'=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ $\left(\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)'=\frac{4}{x^2-4}$

  Vậy nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Qua ví dụ trên chúng ta thấy được sự hữu hiệu của phương pháp hệ số bất định, 1 phân số phức tạp sẽ được chia thành 2 hoặc 3 phân số đơn giản .
- Về nguyên tắc thì có thể ra 1 bài tích phân hàm phân thức được chia thành hàng chục phân số đơn giản nhưng trong trương trình học THPT thì cùng lắm là chia làm 3 phân thức con. Chúng ta hãy cùng theo dõi phép chia sau :

  $\frac{4x^2-5x-1}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{4x^2-5x-1}{(x-2)(x^2-1)}=\frac{4x^2-5x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)}=\frac{m}{x-2}+\frac{n}{x-1}+\frac{p}{x+1}$

  $\Leftrightarrow$ Tử số vế trái = Tử số vế phải

  $\Leftrightarrow 4x^2-5x-1=m(x^2-1)+n(x^2-x-2)+p(x^2-3x+2)$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}4=m+2n+p\\-5=-n-3p\\-1=-m=2p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=2\\n=1\end{cases}$

  Cuối cùng ta thu được : $\frac{4x^2-5x-1}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

  Và ta dễ tính được nguyên hàm của $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}$ là

  $\ln(x-2)+2\ln(x-1)+\ln(x+1)+C$

  Thật hiệu quả phải không !!

<u>VD6</u>-[Báo toán học tuổi trẻ tháng 12-2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x.\cos x$ trên tập số thực là:

A. $\frac{1}{4}\cos 2x+C$ **B.** $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$ **C.** $-\sin x.\cos x$ **D.** $-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

GIẢI

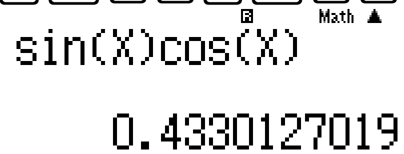
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Chuyển máy tính Casio về chế độ Radian (khi làm các bài toán liên quan đến lượng giác) qw4

➢ Chọn 1 giá trị x bất kì ví dụ như $x=\frac{\pi}{6}$

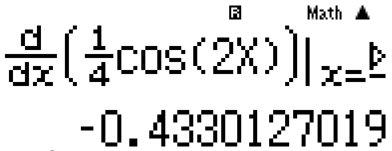
➢ Khi đó giá trị của $f\left(x\right)$ tại $x=\frac{\pi}{6}$ là $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,4330...$

sin ALPHA)) cos ALPHA)) CALC SHIFT x10^x ÷ 6 = S⇔D



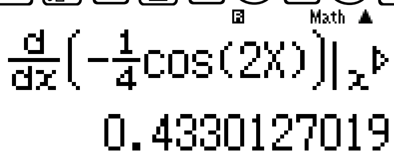
➢ Theo đáp án **A** thì $F\left(x\right)=\frac{1}{4}\cos 2x$. Nếu đáp án A đúng thì $F'\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Ta tính được $F\left(2\right)=-0,4430...$ là một giá trị khác $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Vậy đáp án **A** sai

SHIFT ∫ ▭ 1 ▼ 4 ▶ cos 2 ALPHA)) ▶ ▭ SHIFT x10^x ▼ 6 =



➢ Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án **B**.

SHIFT ∫ − ▭ 1 ▼ 4 ▶ cos 2 ALPHA)) ▶ ▭ SHIFT x10^x ▼ 6 =



Ta được $F'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,4430...=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Vậy đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Dễ thấy cụm $\sin x\cos x$ rất quen thuộc và ta nhớ đến công thức có nhân đôi : $\sin 2x=2\sin x\cos x$
- Từ đó ta rút gọn $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\sin 2x$
- Cái gì đạo hàm ra $\sin$ thì đó là $\cos$!! Ta nhớ đến công thức : $\left(\cos u\right)'=-u'.\sin u$

  Áp dụng $\left(\cos 2x\right)'=-\sin 2x.\left(2x\right)'=-2\sin 2x$

  Cân bằng hệ số bằng cách chia cả 2 vế cho -4 ta được : $\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)'=\frac{1}{2}\sin 2x$
- Từ đây ta biết được $F\left(x\right)=-\frac{1}{4}\cos 2x$

❖ **Bình luận :**

- Khi sử dụng máy tính Casio để làm bài tập liên quan đến hàm lượng giác thì ta nên đổi sang chế độ Radian để phép tính của chúng ta đạt độ chuẩn xác cao..
- Ngoài cách gộp hàm $f\left(x\right)$ theo công thức góc nhân đôi , ta có thể tư duy như sau :

Nếu ta coi $\sin x = u$ thì $\cos x = u'$ vậy ta nhớ tới công thức $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$

Ta thiết lập quan hệ $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ hay $\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right)' = \sin x\cos x$

Vậy ta biết $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$ tuy nhiên so sánh đáp án thì lại không có đáp án giống. Vậy ta tiếp tục biến đổi 1 chút. $\frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}\frac{1-\cos 2x}{2} = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4} \Rightarrow F(x)$ cũng là $-\frac{1}{4}\cos 2x$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên 2017] Nguyên hàm $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ bằng :

A. $\tan^2 x + C$ **B.** $\frac{1}{3}\tan x + C$ **C.** $3\tan^3 x + C$ **D.** $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

Bài 2-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2016^x$ là :

A. $\frac{2016^x}{\ln 2016} + C$ **B.** $2016^x.\ln 2016 + C$

C. $x.2016^{-x}.\ln 2016 + C$ **D.** $\frac{x.2016^{x-1}}{\ln 2016} + C$

Bài 3-[THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa 2017] Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$:

A. $\frac{x^2+x-1}{x+1}$ **B.** $\frac{x^2-x-1}{x+1}$ **C.** $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ **D.** $\frac{x^2}{x+1}$

Bài 4-[THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}\right)dc$

A. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$ **B.** $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$ **D.** $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

Bài 5-[THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ 2017] Không tồn tại nguyên hàm :

A. $\int\frac{x^2-x+1}{x-1}dx$ **B.** $\int\sqrt{-x^2+2x-2}dx$ **C.** $\int\sin 3xdx$ **D.** $\int e^{3x}dx$

Bài 6-[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2017] $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ bằng :

A. $2(\ln x)^{\frac{1}{2}} + C$ **B.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$ **C.** $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} + C$ **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

Bài 7-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 - 2017e^{-2x})$ là :

A. $e^x + 2017e^{-x} + C$ **B.** $e^x - 2017e^{-x} + C$

C. $e^x + \frac{2017}{2}e^{-x} + C$ **D.** $e^x - \frac{2017}{2}e^x + C$

Bài 8-[THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa 2017] Họ nguyên hàm của $\int\frac{2x+3}{2x^2-x-1}dx$:

A. $\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$ **B.** $-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$

C. $\frac{2}{3}\ln|2x+1|-\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$ **D.** $-\frac{1}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

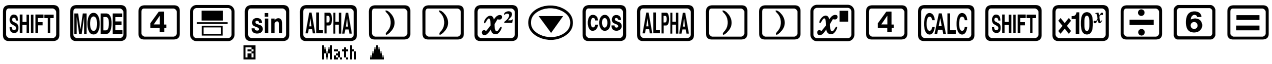
Bài 1-[THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên 2017] Nguyên hàm $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ bằng :

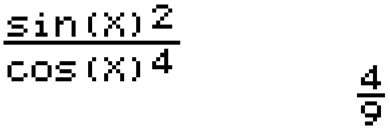
A. $\tan^2 x+C$ **B.** $\frac{1}{3}\tan x+C$ **C.** $3\tan^3 x+C$ **D.** $\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

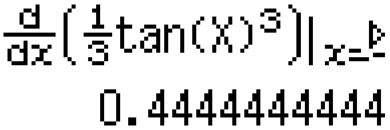
- Chọn chế độ Radian cho máy tính Casio rồi chọn giá trị $x=\frac{\pi}{6}$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{9}$





- Tính đạo hàm của $F(x)=\frac{1}{3}\tan^3 x$ tại $x=\frac{\pi}{6}$ ta được $F(x)=0,44(4)=\frac{4}{9}$





- Vậy $F'(x)=f(x)=\frac{4}{9}$ $\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Biến đổi $\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}=\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}$
- Theo công thức đạo hàm $(u^n)'=n.u^{n-1}.u'$. Với $u=\tan x$ và $n=3$

  Ta có $(\tan^3 x)'=3.\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\tan^3 x\right)'=\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}$. Vậy $F(x)=\frac{1}{3}\tan^3 x$ là 1 nguyên hàm $\Rightarrow \frac{1}{3}\tan^3 x+C$ là họ nguyên hàm cần tìm.

Bài 2-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2016^x$ là :

A. $\frac{2016^x}{\ln 2016}+C$ **B.** $2016^x.\ln 2016+C$

C. $x.2016^{-x}.\ln 2016+C$ **D.** $\frac{x.2016^{x-1}}{\ln 2016}+C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=2016^x$ và $F(2)=4064256$

2 0 1 6 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) CALC 2 =



- Tính đạo hàm của $F(x)=\dfrac{2016^x}{\ln 2016}$ tại 2 ta được $F'(2)=4064256$

SHIFT $\int\blacksquare$ ▭ 2 0 1 6 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▼ ln 2 0 1 6) ▶ ▶ 2 =



- Vậy $F'(x)=f(x)=4064256 \Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u>: Tự luận**

- Theo công thức đạo hàm $(a^x)'=a^x.\ln x$. Với $a=2016$

Ta có $(2016^x)'=2016^x.\ln 2016 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2016^x}{\ln 2016}\right)'=2016^x$. Vậy $F(x)=\dfrac{2016^x}{\ln 2016}$ là 1 nguyên hàm

$\Rightarrow \dfrac{2016^x}{\ln 2016}+C$ là họ nguyên hàm cần tìm.

<u>Bài 3</u>-[THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa 2017] Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$:

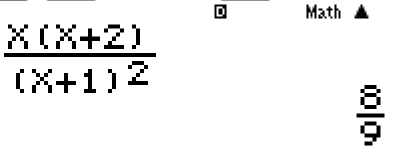
A. $\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ **B.** $\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$ **C.** $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ **D.** $\dfrac{x^2}{x+1}$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u>: CASIO**

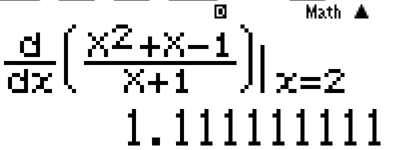
- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ và $f(2)=\dfrac{8}{9}$

▭ ALPHA) (ALPHA) + 2) ▼ (ALPHA) + 1) x^2 CALC 2 =



- Tính đạo hàm của $F(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ tại 2 ta được $F'(2)=1.11(1)=\dfrac{10}{9}$

SHIFT $\int\blacksquare$ ▭ ALPHA) x^2 + ALPHA) − 1 ▼ ALPHA) + 1 ▶ ▶ 2 =



- Vậy $F'(x)\neq f(x) \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ không phải là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u>: Tự luận**

- Biến đổi $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$
- Theo công thức đạo hàm $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-1}{u^2}.u'$. Với $u=x+1$

Ta có $\left(\dfrac{1}{x+1}\right)'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ và $x'=1 \Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)'=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Vậy $F(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ là 1 nguyên hàm $\Rightarrow$ Đáp số **C** đúng

- $F(x)-2=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$ cũng là 1 nguyên hàm $\Rightarrow$ Đáp số **B** đúng
- $F(x)-1=\dfrac{x^2}{x+1}$ cũng là 1 nguyên hàm $\Rightarrow$ Đáp số **D** đúng

<u>Bài 4</u>-[THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)dc$

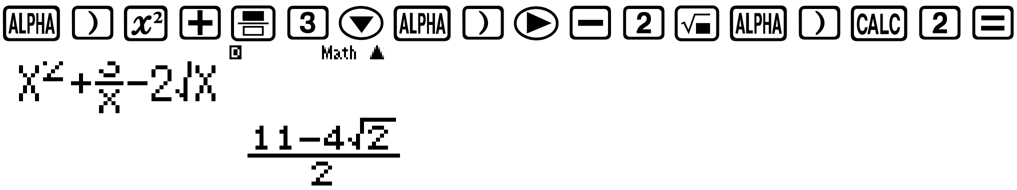
A. $\dfrac{x^3}{3}-3\ln|x|+\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$ **B.** $\dfrac{x^3}{3}+3\ln x-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

C. $\dfrac{x^3}{3}+3\ln|x|+\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$ **D.** $\dfrac{x^3}{3}-3\ln|x|-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

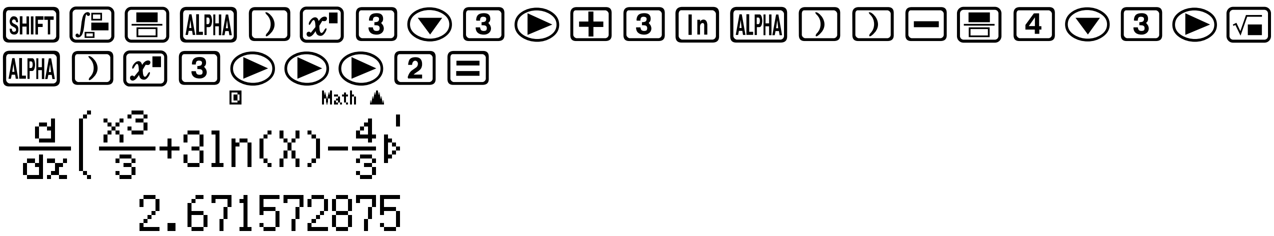
GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u>: CASIO**

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=x^2+\dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}$ và $f(2)=\dfrac{11-4\sqrt{2}}{2}$



- Tính đạo hàm của $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+3\ln x-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}$ tại 2 ta được $F'(2)=2.6715...=\dfrac{11-4\sqrt{2}}{2}$



- Vậy $F'(x)=f(x)=\dfrac{11-4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^3}{3}+3\ln x-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u>: Tự luận**

- Theo công thức đạo hàm $(\ln x)'=\dfrac{1}{x} \Rightarrow (3\ln x)'=\dfrac{3}{x}$
- Theo công thức $(x^n)'=n.x^{n-1}$ với $n=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{3}{2}.x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=2x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)'=2\sqrt{x}$

- Vậy $\left(\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)'=x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}$ hay $F(x)=\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ là 1 nguyên hàm

Bài 5-[THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ 2017] Không tồn tại nguyên hàm :

A. $\int\frac{x^2-x+1}{x-1}dx$ **B.** $\int\sqrt{-x^2+2x-2dx}$ **C.** $\int\sin 3xdx$ **D.** $\int e^{3x}dx$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-2}$ và $f(2)$ không tồn tại

[√■] [−] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [)] [−] [2] [CALC] [2] [=]

```
Math ERROR

[AC]   :Cancel
[◀][▶]:Goto
```

Vậy hàm số ở đáp số C không tồn tại

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Dễ thấy $-x^2+2x-2=-(x-1)^2-1<0$ với mọi giá trị $x\in R$
- Vậy $\sqrt{-x^2+2x-2}$ không tồn tại

Bài 6-[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2017] $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ bằng :

A. $2(\ln x)^{\frac{1}{2}}+C$ **B.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$ **C.** $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}+C$ **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3}+C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ và $f(2)=0.4162...$

[■/□] [√■] [ln] [ALPHA] [)] [)] [▼] [ALPHA] [)] [CALC] [2] [=]

```
√ln(X)
  X
     0.4162773056
```

- Tính đạo hàm của $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ tại 2 ta được $F'(2)=0.4612...$

[SHIFT] [∫■□] [■/□] [2] [▼] [3] [▶] [√■] [ln] [ALPHA] [)] [)] [x■] [3] [▶] [▶] [▶] [2] [=]

```
d/dx(2/3√ln(X)³)|x=▸
     0.4162773056
```

- Vậy $F'(x)=f(x)=0.4162...$ $\Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ là nguyên hàm của $f(x)$ $\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Theo công thức $(u^n)'=n.u^{n-1}.u'$ với $u=\ln x$

$$\Rightarrow\left(\ln x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}.\ln x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=\ln x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}\right)'=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$$

- Vậy $\left(\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}\right)' = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ hay $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ là 1 nguyên hàm

Bài 7-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x\left(1-2017e^{-2x}\right)$ là :

A. $e^x + 2017e^{-x} + C$ **B.** $e^x - 2017e^{-x} + C$

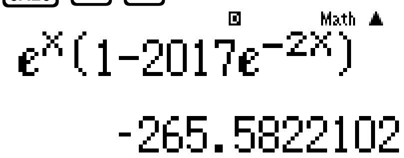
C. $e^x + \frac{2017}{2}e^{-x} + C$ **D.** $e^x - \frac{2017}{2}e^x + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

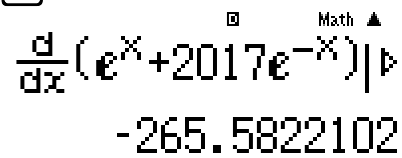
- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x) = e^x\left(1-2017e^{-2x}\right)$ và $f(2) = -265.5822...$

ALPHA x10ˣ x■ ALPHA) ▶ (1 − 2 0 1 7 ALPHA x10ˣ x■ − 2 ALPHA) ▶) CALC 2 =



- Tính đạo hàm của $F(x) = e^x + 2017e^{-x}$ tại 2 ta được $F'(2) = -265.5822...$

SHIFT ∫□ ALPHA x10ˣ x■ ALPHA) ▶ + 2 0 1 7 ALPHA x10ˣ x■ − ALPHA) ▶ ▶ 2 =



- Vậy $F'(x) = f(x) = -265.5822...$ $\Rightarrow$ $F(x) = e^x + 2017e^{-x}$ là nguyên hàm của $f(x)$ $\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Biến đổi $e^x\left(1-2017e^{-2x}\right) = e^x - 2017e^{-x}$
- Theo công thức $\left(e^x\right)' = e^x$ và $\left(e^{-x}\right) = -e^x \Rightarrow \left(-2017e^{-x}\right) = 2017e^{-x}$

 Vậy $\left(e^x + 2017e^{-x}\right)' = e^x - 2017e^{-x}$ hay $F(x) = e^x + 2017e^{-x} = e^x\left(1+2017e^{-2x}\right)$ là 1 nguyên hàm

Bài 8-[THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa 2017] Họ nguyên hàm của $\int \frac{2x+3}{2x^2-x-1}dx$:

A. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$ **B.** $-\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

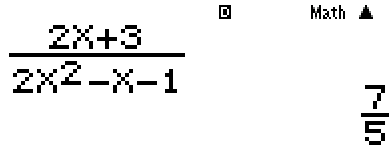
C. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| - \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$ **D.** $-\frac{1}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

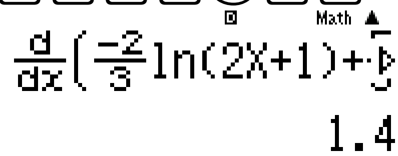
- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2-x-1}$ và $f(2) = \frac{7}{5}$

▭ 2 ALPHA) + 3 ▼ 2 ALPHA) x² − ALPHA) − 1 CALC 2 =



- Tính đạo hàm của $F(x)=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|$ tại 2 ta được $F'(2)=1.4=\frac{7}{5}$

SHIFT ∫ ▭ − 2 ▼ 3 ▶ ln 2 ALPHA) + 1) + ▭ 5 ▼ 3 ▶ ln ALPHA) − 1) ▶ 2 =



- Vậy $F'(x)=f(x)=\frac{7}{5} \Rightarrow F(x)=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u>: Tự luận**

- Vì mẫu số tách được thành nhân tử : $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$ nên ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để tách phân số :

$$\frac{2x+3}{2x^2-x-1}=m.\frac{1}{x-1}+n.\frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow 2x+3=m(2x+1)+n(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+3=(2m+n)x+m-n \Leftrightarrow \begin{cases}2m+n=2\\ m-n=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\frac{5}{3}\\ n=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

Vậy ta tách được $\frac{2x+3}{2x^2-x-1}=\frac{5}{3}.\frac{1}{x-1}-\frac{4}{3}.\frac{1}{2x+1}$

- Theo công thức $(\ln u)'=\frac{1}{u}.u' \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|\right)'=\frac{5}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{4}{3}\frac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ là 1 nguyên hàm.

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 19. TÍNH NHANH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH.

1) LỆNH TÍNH TÍCH PHÂN

Để tính giá trị 1 tích phân xác định ta sử dụng lệnh [∫□]



2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 25 đề minh họa 2017] Tính giá trị tính phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x.\sin x dx$

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ **B.** $-\pi^4$ **C.** 0 **D.** $-\frac{1}{4}$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

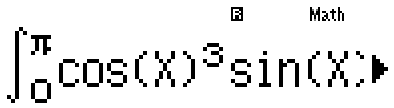
➢ Vì bài toán liên quan đến các đại lượng tính π nên ta chuyển máy tính về chế độ Radian [SHIFT] [MODE] [4]

➢ Gọi lệnh tính giá trị tích phân [∫□]

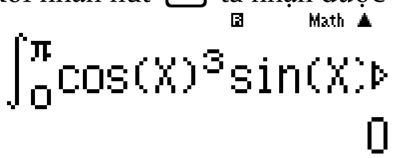


Điền hàm $f(x) = \cos^3 x.\sin x$ và các cận 0 và π vào máy tính Casio

[cos] [ALPHA] [)] [)] [x■] [3] [▶] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▼] [0] [▲] [SHIFT] [×10^x]



Rồi nhấn nút [=] ta nhận được ngay kết quả của tích phân là 0



➢ So sánh với các đáp án **A**, **B**, **C**, **D** thì ta thấy **C** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Đặt $t = \cos x$ khi đó $\cos^3 x = t^3$
- Vi phân 2 vế phương trình ẩn phụ $\cos x = t \Leftrightarrow (\cos x)'dx = t'dt \Leftrightarrow -\sin xdx = dt$
- Đổi cận dưới : $x = 0$ khi đó $t = \cos 0 = 1$
  Đổi cận trên : $x = \pi$ khi đó $t = \cos\pi = -1$
- Lúc này tích phân phức tạp ban đầu đã trở thành tích phân đơn giản

$$I = -\int_1^{-1} t^3 dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_1^{-1} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

❖ **Bình luận** :

- Có 10 phép đặt ẩn phụ tính nguyên hàm tích phân. Bài toán trên có tính chết của phép số 2 : "nếu tích phân chứa cụm $\sin xdx$ thì đặt ẩn phụ $\cos x = t$"
- Trong thực tế học tập, việc đổi vi phân (đổi đuôi) thường bị các bạn lãng quên , chúng ta chú ý điều này.

PHỤ LỤC : 10 PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ THƯỜNG GẶP

❖ **Phương pháp đặt ẩn phụ** thường dùng để đưa 1 tích phân phức tạp, khó tính trở về một tích phân đơn giản, dễ tính hơn. Sau đây là 10 phép đặt ẩn phụ với 10 dấu hiệu khác nhau thường gặp.

- **Phép 1** : Nếu xuất hiện căn thức thì đặt cả căn bằng t
- **Phép 2** : Nếu xuất hiện cụm $\sin xdx$ thì đặt $\cos x = t$
- **Phép 3** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{\cos^2 x}dx$ thì đặt $\tan x = t$
- **Phép 4** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{\sin^2 x}dx$ thì đặt $\cot x = t$
- **Phép 5** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{x}dx$ thì đặt $\ln x = t$
- **Phép 6** : Nếu xuất hiện $e^x dx$ thì đặt $e^x = t$
- **Phép 7** : Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{x^2 + a^2}dx$ thì đặt $x = \tan t$
- **Phép 8** : Nếu xuất hiện cụm $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = a\sin t$
- **Phép 9** : Nếu xuất hiện cụm $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì đặt $x = \frac{a}{\cos t}$
- **Phép 10** : Nếu xuất hiện biểu thức trong hàm $\ln, \log, e...$ thì đặt cả biểu thức là t

❖ **Việc đặt ẩn phụ thường tiến hành theo 3 bước**

- **Bước 1** : Đặt ẩn phụ theo dấu hiệu
- **Bước 2** : Vi phân 2 vế phương trình ẩn phụ để đổi đuôi
- **Bước 3** : Đổi cân dưới và cận trên sau đó thế tất cả 3 đại lượng trên vào tích phan ban đầu để tạo thành một tích phân đơn giản hơn.

VD2-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Tính tích phân $I = \int_1^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}}dx$

A. $\sqrt{3} - \sqrt{e^2 - 1}$ **B.** $2\sqrt{\ln 2 - 1}$ **C.** $\sqrt{\ln^2 2 - 1}$ **D.** Cả 3 đáp án trên đều sai

GIẢI

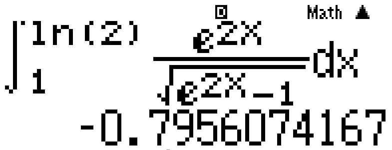
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi lệnh tính giá trị tích phân [∫□]

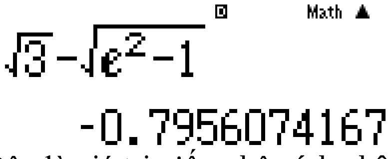


➢ Điền hàm $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$ và các cận 1 và $\ln 2$ vào máy tính Casio Rồi nhấn nút [=] ta nhận được ngay kết quả của tích phân là $-0,7956...$

[∫□] [▭/▭] [ALPHA] [×10ˣ] [x■] [2] [ALPHA] [)] [▼] [√■] [ALPHA] [×10ˣ] [x■] [2] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [▶] [▶] [▶] [1] [▲] [ln] [2] [)] [=]



- Giữ nguyên kết quả này ở máy tính Casio số 1 , dùng máy tính Casio thứ 2 để tính kết qua của các đáp án **A**, **B**, **C**, **D** ta thấy đáp số **C**



Đây là giá trị giống hệt tích phân, vậy C là đáp số chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Đặt $t=\sqrt{e^{2x}-1}$
- Vi phân 2 vế phương trình ẩn phụ
- $t=\sqrt{e^{2x}-1} \Leftrightarrow t^2=e^{2x}-1 \Leftrightarrow \left(t^2\right)'dt=\left(e^{2x}-1\right)'dx \Leftrightarrow 2tdt=2e^{2x}dx \Leftrightarrow tdt=e^{2x}dx$
- Đổi cận dưới : $x=1$ khi đó $t=\sqrt{e^2-1}$

  Đổi cận trên : $x=\ln 2$ khi đó $t=\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\sqrt{3}$
- Lúc này tích phân phức tạp ban đầu đã trở thành tích phân đơn giản

$$I=\int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}.tdt=\int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} dt=t\Big|_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{e^2-1}$$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Bài toán trên chứa nội dung của phép đặt ẩn phụ số 1 "nếu tích phân chứa căn thì ta đặt cả căn là ẩn phụ t "
- Việc vi phân luôn phương trình đặt ẩn phụ $t=\sqrt{e^{2x}-1}$ thường khó khăn vì chứa căn, do đó ta thường khử căn $t^2=e^{2x}-1$ bằng cách bình phương 2 vế. Sau đó ta mới vi phân

VD3-[THP Nguyễn Đình Chiểu – Bình Dương 2017] Giá trị của a để tích phân $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx$ có giá trị $\frac{a^2}{2}+a+\ln 3$ là :

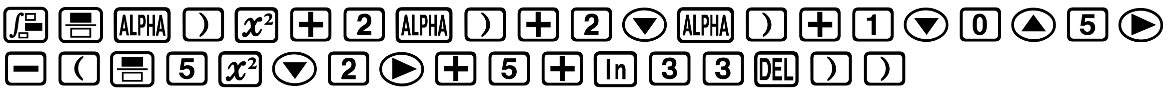
A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

GIẢI

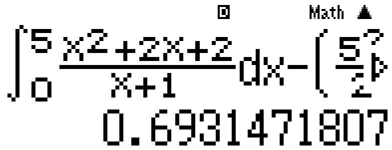
❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- Về mặt bản chất nếu tích phân $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx$ có giá trị bằng biểu thức $\frac{a^2}{2}+a+\ln 3$ thì hiệu của chúng phải bằng nhau. Vậy ta thiết lập hiệu $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx-\left(\frac{a^2}{2}+a+\ln 3\right)$ và bài toán trở thành tìm a để hiệu trên bằng 0
- Thử với giá trị $a=5$ Ta nhập hiệu trên vào máy tính Casio hiệu

$$\int_0^5 \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx-\left(\frac{5^2}{2}+5+\ln 3\right)$$

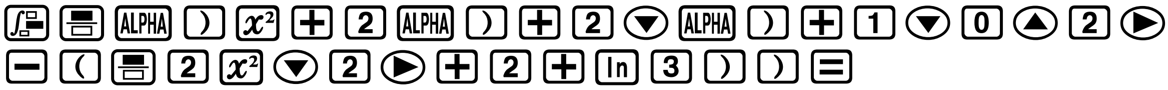


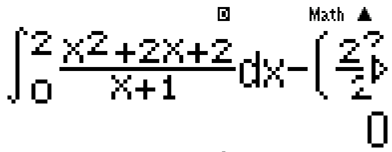
Rồi nhấn phím =



Máy tính Casio báo một giá trị khác 0 vậy đáo số **A** là sai.

- Sửa vị trí a thành số 4 và số 3 ta đều nhận được kết quả khác 0 vậy đáp án **B** và **C** đều sai
- Thử với giá trị $a=2$ ta được :





Khi đó hiệu trên bằng 0 tức là **A** là đáp án chính xác

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Tách tích phân thành : $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx = \int_0^a \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx$
- Vì $\left(\frac{x^2}{2}+x\right)' = x+1$ nên nguyên hàm của $x+1$ là $\frac{x^2}{2}+x$
- Vì $\left(\ln|x+1|\right)' = \frac{1}{x+1}$ nên nguyên hàm của $\frac{1}{x+1}$ là $\ln|x+1|$

  Tóm lại $\int_0^a \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}+a+\ln|a+1|$
- Thiết lập quan hệ $\frac{a^2}{2}+a+\ln|a+1| = \frac{a^2}{2}+a+\ln 3 \Leftrightarrow \ln|a+1| = \ln 3 \Leftrightarrow a=2$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Bài toán này còn có mẹo giải nhanh dành cho các bạn tinh ý, chúng ta quan sát hàm $f(x)$ chứa thành phần $\frac{1}{x+1}$ có mối liên hệ với nguyên hàm của nó là $\ln|x+1|$. Ta đặc câu hỏi vậy phải chăng $\ln|x+1|$ khi thế cận sẽ là $\ln|a+1|$ có mối liên hệ với $\ln 3 = \ln|a+1|$ suy ra $a=2$
- Hầu hết bài toán chứa tham số tích phân tác giả xin khuyên các bạn nên dùng phương pháp Casio chứ phương pháp tự luận nhiều khi rất loằng ngoằng và dễ sai.

<u>VD4</u>-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] So sánh các tích phân

$I = \int_1^4 \sqrt{x}dx,\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx,\ K = \int_0^1 x.e^x$

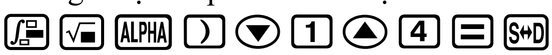
Ta có kết quả nào sau đây

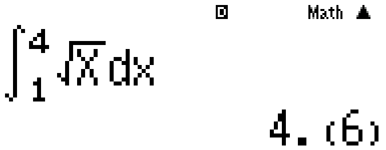
A. $I>K>J$ **B.** $I>J>K$ **C.** $J>I>K$ **D.** $K>I>J$

GIẢI

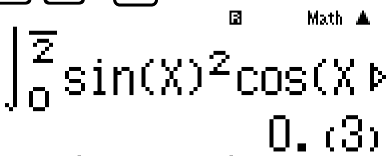
❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

- Tính giá trị tích phân I ta được $I = 4.6666...$ và ghi giá trị này ra nháp.

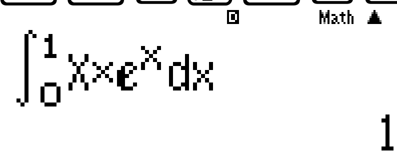




- Tính giá trị tích phân J ta được $J = 0.3333...$ và lại ghi giá trị này ra nháp
  SHIFT MODE 4 ∫ sin ALPHA)) x^2 cos ALPHA)) ▼ 0 ▲ ▭ SHIFT ×10^x ▼ 2 ÷ S⇔D



- Tính tiếp giá trị cuối cùng $K = 1$
- SHIFT MODE 3 ∫ ALPHA) × ALPHA ×10^x $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▼ 0 ▲ 1 =



- Rõ ràng $4.6666 > 1 > 0.3333$ hay $I > K > J$. Vậy đáp án chính xác là **A**

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Qua bài toán trên ta thấy rõ hơn sức mạnh của Casio khi giải nhanh những bài tích phân xác định, phương pháp tự luận cũng có nhưng rất dài dòng, tác giả xin không đề cập tới dành thời gian cho các bài khác quan trọng hơn.

<u>VD 5</u>-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^1 \left(|3x-1| - 2|x|\right)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{-11}{6}$ **D.** 0

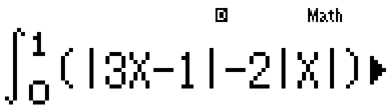
GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

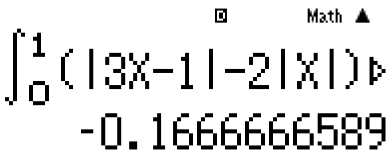
- Cách gọi lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT hyp



- Khi biết lệnh giá trị tuyệt đối rồi chúng ta nhập tích phân và tính giá trị một cách bình thường
- ∫ (SHIFT hyp 3 ALPHA) − 1 ▶ − 2 SHIFT hyp ALPHA) ▶) ▼ 0 ▲ 1



- Nhấn nút = ta sẽ nhận được giá trị tích phân là $I = -0,016666...$



- Đây chính là giá trị xuất hiện ở đáp số A. Vậy A là đáp số chính xác của bài toán

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- $\int_0^1 (|3x-1|-2|x|)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (|3x-1|-2|x|)dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (|3x-1|-2|x|)dx$
- Khi $0 \le x \le \frac{1}{3}$ thì $\int_0^{\frac{1}{3}} (|3x-1|-2|x|)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3x-2x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-5x)dx = \left(x-\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$
- Khi $\frac{1}{3} \le x \le 1$ thì $\int_{\frac{1}{3}}^1 (|3x-1|-2|x|)dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x-1-2x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 (x-1)dx = \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^1 = -\frac{2}{9}$
- Vậy $I = \int_0^{\frac{1}{3}} (|3x-1|-2|x|)dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (|3x-1|-2|x|)dx = \frac{1}{18} - \frac{2}{9} = \frac{-1}{6}$

❖ **Bình luận** :

- Để giải các bài toán tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối ta phải sử dụng **phương pháp chia khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối**.

  Ta biết $3x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}$ và $3x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{3}$ vậy ta sẽ chia đoạn $[0;1]$ thành 2 đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ và $\left[\frac{1}{3};1\right]$
- Để tách 1 tích phân thành 2 tích phân ta sử dụng công thức chèn cận : Với giá trị c bất kì thuộc đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

VD 6-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = a\pi + \frac{1}{4}\ln b \quad (0 < a < 1.1 < b < 3)$. Tích ab bằng bao nhiêu ?

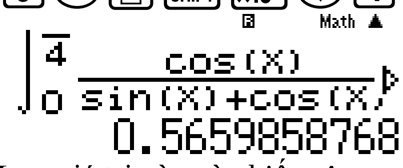
A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{8}$

GIẢI

❖ **Cách 1** : CASIO

➢ Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = 0.5659... = A$

SHIFT MODE 4 ∫□ ▭ cos ALPHA)) ▼ sin ALPHA)) + cos ALPHA)) ▼
0 ▲ ▭ SHIFT x10^x ▼ 4 =



Lưu giá trị này vào biến A

SHIFT RCL (−)



Vậy ta có : $a\pi + \frac{1}{4}\ln b = 0.5659... = A \Rightarrow a = \dfrac{A - \frac{1}{4}\ln b}{\pi}$

- Nếu đáp số A đúng thì $ab = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{A - \frac{1}{4}\ln b}{\pi}.b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b\left(A - \frac{1}{4}\ln b\right) - \frac{\pi}{2} = 0$

  Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm b

  ALPHA) (ALPHA (−) − ▭ 1 ▼ 4 ▶ ALPHA ALPHA ln ALPHA))) − ▭ SHIFT ×10ˣ ▼ 2 ▶ SHIFT CALC = 0 • 5 =

  ```
  Can't Solve

  [AC]  :Cancel
  [◀][▶]:Goto
  ```

  Không tìm được b $\Rightarrow$ Đáp án A sai

- Với đáp án B ta có $b\left(A - \frac{1}{4}\ln b\right) - \frac{\pi}{4} = 0$

  ALPHA) (ALPHA (−) − ▭ 1 ▼ 4 ▶ ln ALPHA))) − ▭ SHIFT ×10ˣ ▼ 4 SHIFT CALC = 0 • 5 =

  ```
  X(A-1/4 ln(X))-π/4
  X=                2
  L-R=              0
  ```

  $\Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$ thỏa điều kiện $0 < a < 1.1 < b < 3$

  $\Rightarrow$Đáp số **B** chính xác của bài toán

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán rất hay kết hợp lệnh tính tích phân và lệnh dò nghiệm SHIFT SOLVE
- Cách Casio có thêm một ưu điểm là tránh được các bài tích phân khó như $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng :

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Bài 2-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1}$ bằng :

A. 3 **B.** 7 **C.** –5 **D.** –3

Bài 3-[Group Nhóm Toán 2107] Tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ bằng :

A. $\ln 3$ **B.** $\ln\frac{3}{4}$ **C.** $\ln\frac{3}{2}$ **D.** $\ln\frac{1}{2}$

Bài 4-[THPT Nho Quan – Ninh Bình 2017] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx = \frac{1}{4}\ln 3$. Tìm giá trị của a :

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Bài 5-[Báo THTT tháng 11 năm 2016] Giá trị nào của a để $\int_0^a \left(3x^2+2\right)dx = a^3+2$?:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Bài 6-[THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh 2017] Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{x^2+2\ln x}{x}dx$:

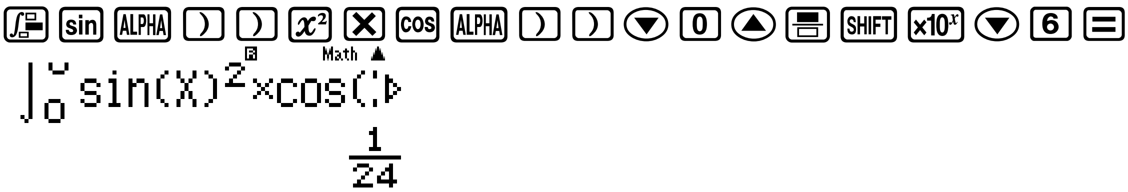
A. $I=e^2-\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{e^2+1}{2}$ **C.** $I=e^2+1$ **D.** $I=\frac{e^2}{2}$

Bài 1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x\cos xdx = \frac{1}{64}$ thì n bằng :

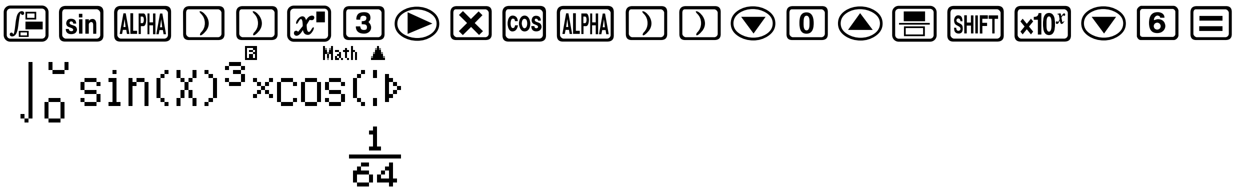
A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

GIẢI

- Với $n=2$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cos xdx = \frac{1}{24} \neq \frac{1}{64}$ $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai



- Với $n=3$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x\cos xdx = \frac{1}{64}$ $\Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác



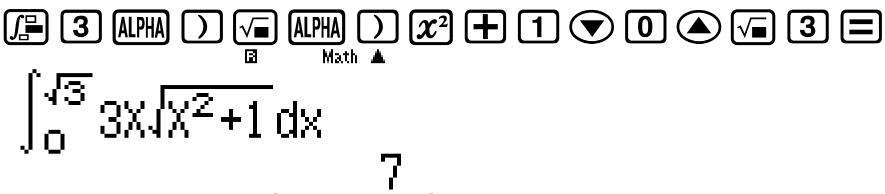
- Chú ý: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện cụm* $\cos xdx$ *"* ta sẽ đặt $t=\sin x$

Bài 2-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1}dx$ bằng :

A. 3 **B.** 7 **C.** –5 **D.** –3

GIẢI

- Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1} = 7 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**



- Chú ý: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện căn thức"* ta sẽ đặt căn thức là ẩn phụ

Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t^2=x^2+1$ Vi phân hai vế $\Rightarrow 2xdx=2tdt \Rightarrow xdx=tdt$.

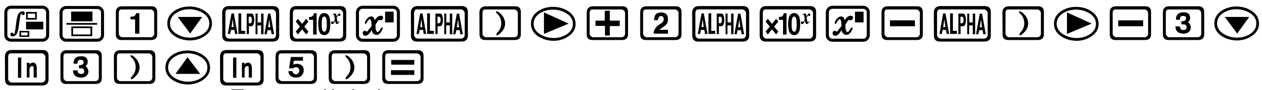
Đổi biến : $\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{array}\right.$. Khi đó tích phân trở thành $\int_1^2 3t.tdt = t^3\Big|_1^2 = 7$

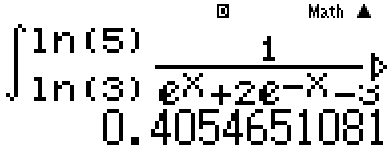
Bài 3-[Group Nhóm Toán 2107] Tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ bằng :

A. $\ln 3$ **B.** $\ln\frac{3}{4}$ **C.** $\ln\frac{3}{2}$ **D.** $\ln\frac{1}{2}$

GIẢI

- Tính tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}=0.4054...=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**





- Chú ý: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện e^x "* ta sẽ đặt e^x là ẩn phụ

Đặt $t=e^x$ Vi phân hai vế $\Rightarrow e^x dx=dt$.

Đổi biến : $\left[\begin{array}{l} x=\ln 3\Rightarrow t=3 \\ x=\ln 5\Rightarrow t=5\end{array}\right.$. Khi đó tích phân trở thành $\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{e^x dx}{e^{2x}-3e^x+2}=\int_3^5\frac{dt}{t^2-3t+2}=...=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

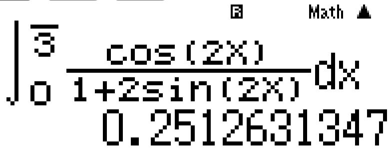
Bài 4-[THPT Nho Quan – Ninh Bình 2017] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{a}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\ln 3$. Tìm giá trị của a :

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

GIẢI

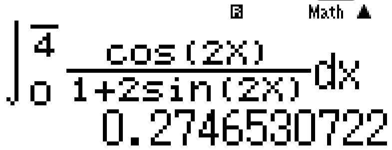
- Thử với $a=3$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=0.2512...\neq\frac{1}{4}\ln 3\Rightarrow$ Đáp số **A** sai





- Thử với $a=4$ Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=0.2746=\frac{1}{4}\ln 3\Rightarrow$ Đáp số **C** sai





- Chú ý: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện cụm* $\cos 2xdx$ " ta sẽ đặt $\sin 2x=t$ là ẩn phụ

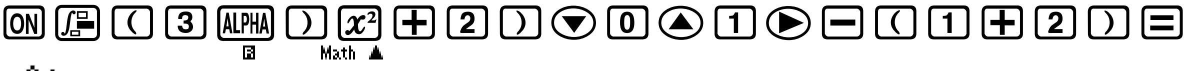
Bài 5-[Báo THTT tháng 11 năm 2016] Giá trị nào của a để $\int_0^a\left(3x^2+2\right)dx=a^3+2$?:

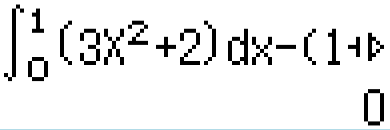
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

GIẢI

- Thiết lập phương trình $\int_0^a\left(3x^2+2\right)dx-\left(a^3+2\right)=0$. Vì đề bài cho sẵn các nghiệm nên ta sử dụng phép thử

Với $a=1$ vế trái phương trình là : $\int_0^1 (3x^2+2)dx-(1^3+2)=0 \Rightarrow$ Đáp án đúng là **B**



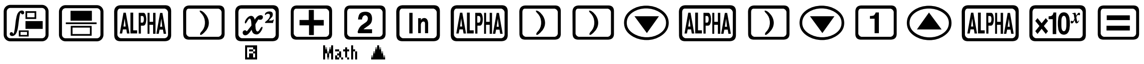


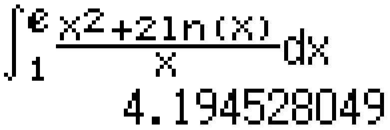
Bài 6-[THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh 2017] Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{x^2+2\ln x}{x}dx$:

A. $I=e^2-\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{e^2+1}{2}$ **C.** $I=e^2+1$ **D.** $I=\frac{e^2}{2}$

GIẢI

- Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{x^2+2\ln x}{x}dx=4.1945...=\frac{e^2+1}{2} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**





- Chú ý: Tự luận ta nên tách tích phân thành 2 tích phân con để dễ xử lý : $I=\int_1^e xdx+2\int_1^e \ln x.\frac{1}{x}dx$

Nếu tích phân "xuất hiện cụm $\frac{1}{x}dx$ " thì Đặt $\ln x=t$ Vi phân hai vế $\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$.

Đổi biến : $\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=1 \end{array}\right.$. Khi đó tích phân trở thành $\int_1^e xdx+2\int_o^1 tdt=\frac{e^2+1}{2}$

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 20. TÍNH NHANH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx \text{ (1) (Dạng 1)}$$

Quy ước : Trong bài học này ta gọi đường thẳng $x = a$ là cận thứ nhất , $x = b$ là cận thứ hai
Chú ý : Khi đề bài không cho hai cận thì hai cận sẽ có dạng $x = x_1$, $x = x_2$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = f(y)$, $x = g(y)$ và hai cận $y = a, y = b$ được tính theo công thức :

$$S = \int_a^b \left| f(y) - g(y) \right| dy \text{ (2) (Dạng 2)}$$

3. Tổng hợp phương pháp (gồm 3 bước)
+)**Bước 1**: Xác định rõ hai hàm $y = f(x), y = g(x)$ hoặc $x = f(y), x = g(y)$
+)**Bước 2**: Xác định rõ 2 cận $x = a, x = b$ hoặc $y = a, y = b$
+)**Bước 3**: Lắp vào công thức (1) hoặc (2) rồi sử dụng máy tính casio

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa môn Toán Bộ GD-ĐT lần 1năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

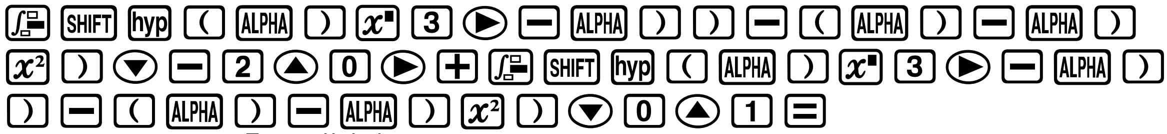
GIẢI

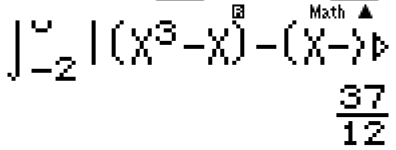
- Ta có hai hàm số $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$
- Giải phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

  Ta có 3 cận $x = 0; x = 1; x = -2$ mà công thức chỉ có 2 cận vậy ta chia thành 2 khoảng cận $-2 \le x \le 0$ và $0 \le x \le 1$
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - x$, $y = 3 - x$ và hai đường thẳng $x = -2; x = 0$ là $S_1 = \int_{-2}^{0} \left| \left(x^3 - x\right) - \left(x - x^2\right) \right| dx$

  Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - x$, $y = 3 - x$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 1$ là $S_2 = \int_0^1 \left| \left(x^3 - x\right) - \left(x - x^2\right) \right| dx$
- Vậy tổng diện tích $S = \int_{-2}^{0} \left| \left(x^3 - x\right) - \left(x - x^2\right) \right| dx + \int_0^1 \left| \left(x^3 - x\right) - \left(x - x^2\right) \right| dx$

  Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân





Vậy $S=\frac{37}{12}$ ta chọn đáp án chính xác là **A**

❖ **Bình luận :**

- Thật tuyệt vời phải không, và từ đây theo 3 bước kết hợp Casio ta sẽ làm mọi bài liên quan đến tính diện tích hình phẳng.

VD2-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Cho miền (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\ln(x+1), y=\ln 2.\sqrt{x}, x=2$. Diện tích miền phẳng (D) bằng :

A. $\ln\sqrt[3]{16}.\left(\sqrt{2}+1\right)-3\ln 3+1$ **B.** $-\frac{4}{3}\ln 2.\left(\sqrt{2}+1\right)+3\ln 3-1$

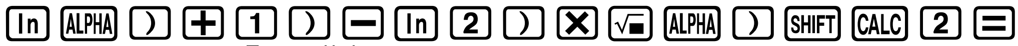
C. $\ln\frac{16}{27}+\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln 2+1$ **D.** $\ln\frac{\sqrt[3]{16}}{27}+\frac{4}{3}\ln 2^{\sqrt{2}}+1$

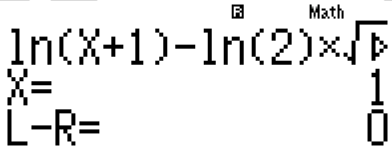
GIẢI

➢ Ta có hai hàm số $y=\ln(x+1)$ và $y=\ln 2.\sqrt{x}$

➢ Cận đầu tiên là $x=2$ ta đi tìm cận tiếp theo bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm $\ln(x+1)=\ln 2.\sqrt{x} \Leftrightarrow \ln(x+1)-\ln 2.\sqrt{x}=0$

Để giải nhanh phương trình này ta sẽ sử dụng Casio với chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE



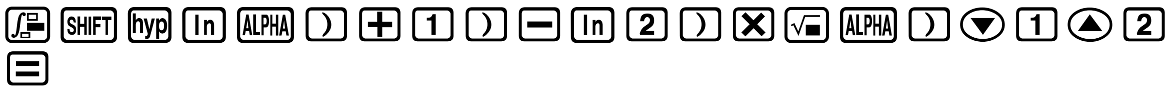


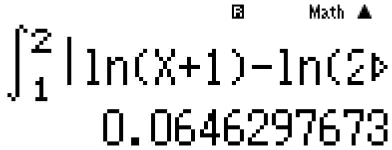
Ta được nghiệm $x=1$

Vậy ta tìm được hai cận $x=1; x=2$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số $y=\ln(x+1)$, $y=\ln 2.\sqrt{x}$ và hai đường thẳng $x=1; x=2$ là $S=\int_1^2\left|\ln(x+1)-\ln 2.\sqrt{x}\right|dx$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân





Vậy $S=0,0646...$ Tính giá trị xem đáp án nào có kết quả $0,0646...$ thì là đáp án chính xac.

$\Rightarrow$ ta chọn **B**

❖ **Bình luận :**

- Việc tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm hay tung độ giao điểm mà phức tạp ta có thể tính nhanh bằng kỹ thuật dò nghiệm với chức năng SHIFT SOLVE đã được học ở bài trước.

VD3-[Th thử website Vnmath.com lần 1 năm 2017]

Đường thẳng $y = c$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ thành hai phần bằng nhau. Tìm c

A. $\sqrt[3]{16}$ **B.** $\sqrt[3]{9}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{3}$

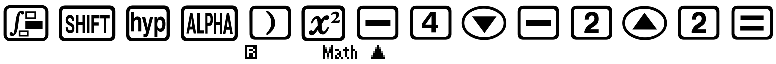
GIẢI

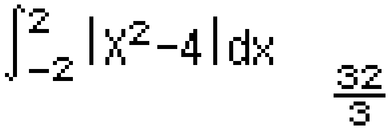
- Hai hàm số $y = x^2$ và $y = 4$

  Giải phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

  Vậy cận thứ nhất là $x = -2$ cận thứ hai là $x = 2$
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 4$ và hai đường thẳng $x = -2, x = 2$ là : $S = \int_{-2}^{2} \left| x^2 - 4 \right| dx$

  Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

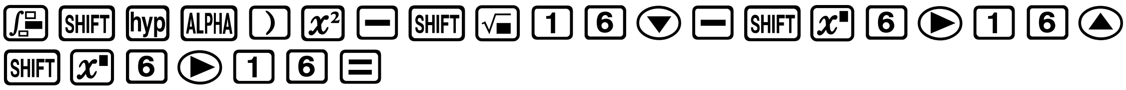
  

  Vậy $S = \frac{32}{3} \Rightarrow$ một nửa diện tích là $\frac{16}{3}$
- Vì đường thẳng $y = c$ chia hình phẳng S thành 2 phần bằng nhau $\Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, đường thẳng $y = c$ có độ lớn là $\frac{16}{3}$
- Thử với đáp án A ta có $y = \sqrt[3]{16}$. Giải phương trình hoành độ giao điểm

  $x^2 = \sqrt[3]{16} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[6]{16}$

  $\Rightarrow S_1 = \int_{-\sqrt[6]{16}}^{\sqrt[6]{16}} \left| x^2 - \sqrt[3]{16} \right| dx$

  Vậy $S_1 = \frac{16}{3}$ (đúng) $\Rightarrow$ đáp án chính xác là **A**

VD4-**[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]**

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y^2 = x + 1$ và trục Oy bằng :

A. 2 **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

GIẢI

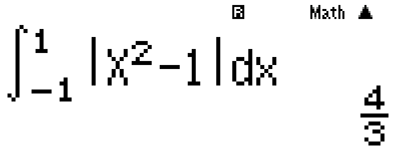
- Hai hàm số $x = y^2 - 1$ và trục Oy có phương trình $x = 0$

  Giải phương trình tung độ giao điểm $y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

  Vậy cận thứ nhất là $y = -1$ cận thứ hai là $y = 1$
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = y^2 - 1$, $x = 0$ và hai đường thẳng $y = -1, y = 1$ là : $S = \int_{-1}^{1} \left| \left(y^2 - 1 \right) - 0 \right| dy$

  Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân



Vậy $S=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ đáp số chính xác là **C**

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Bài toán này nên đưa về dạng 2 thì sẽ dễ dàng tính toán hơn. Nếu đưa về dạng 1 ta phải tính $y=\pm\sqrt{x+1}$ rồi lại phải tìm cận sẽ khó hơn
- Ta hiểu với máy tính X hay Y chỉ là kí hiệu nên $S=\int_{-1}^{1}\left|\left(y^2-1\right)-0\right|dy=\int_{-1}^{1}\left|\left(x^2-1\right)-0\right|dx$

  Nên ta có thể thực hiện phép tính với máy tính casio như trên

<u>VD5</u>-[Sách bài tập Nâng cao Giải tích lớp 12 t.153]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x=y^{\frac{2}{3}}$, đường cong $x+y^4=2$ và trục hoành

A. $\frac{6}{5}$ **B.** $\frac{8}{5}$ **C.** $\frac{5}{5}$ **D.** $\frac{7}{4}$

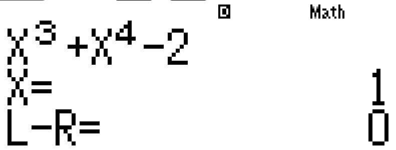
GIẢI

➢ Hai hàm số $x=y^{\frac{2}{3}}$ và $x=2-y^4$

Trục hoành có phương trình $y=0$ $\Rightarrow$ cận thứ nhất $y=0$

Để tìm cần thứ hai ta giải phương trình tung độ giao điểm : $y^{\frac{2}{3}}=2-y^4$. Để giải nhanh ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE



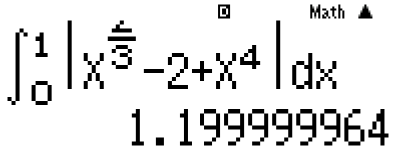


vậy cận thứ hai là $y=1$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x=y^{\frac{2}{3}}$, $x=2-x^4$ và hai đường thẳng $y=0, y=1$ là : $S=\int_0^1\left|\left(y^{\frac{2}{3}}\right)-\left(2-y^4\right)\right|dy$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân





Vậy $S=2$ $\Rightarrow$ đáp số chính xác là **A**

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Do cài đặt làm tròn của máy tính của mỗi máy là khá nhau nên ta nhanh nhạy trong việc làm tròn để tìm đáp án đúng nhất.

<u>VD6</u>-[Thi thử lớp toán thầy Bình lần 2 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Elip có phương trình $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

A. π **B.** 3π **C.** $\frac{9\pi}{5}$ **D.** $\frac{7\pi}{3}$

GIẢI

➢ Ta có $x^2+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow x^2=1-\frac{y^2}{9} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{9}} \Rightarrow$ Hai hàm số $x=-\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$ và $x=\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$

Để tìm hai cận ta giải phương trình tung độ giao điểm :

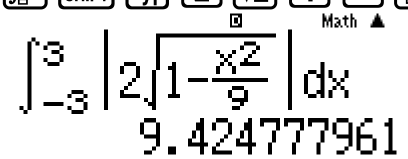
$-\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}=\sqrt{1-\frac{y^2}{9}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{y^2}{9}}=0 \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm 3$.

vậy cận thứ nhất $y=-3$ và cận thứ hai $y=3$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x=-\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$, $x=\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$ và hai đường thẳng $y=-3, y=3$ là : $S=\int_{-3}^{3}\left|\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}-\left(-\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\right)\right|dy$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

[∫▭] [SHIFT] [hyp] [2] [√▭] [1] [−] [▭/▭] [ALPHA] [)] [x^2] [▼] [9] [▼] [−] [3] [▲] [3] [=]



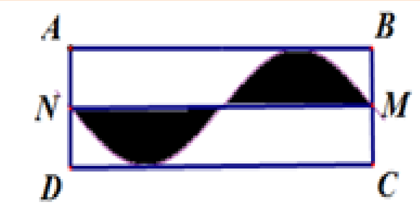
Vậy $S=9.4247...=3\pi \Rightarrow$ đáp số chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**

- Trong chương trình lớp 10 sách giáo khoa đã đề cập đến các tính chất cơ bản của hình Elip nhưng chưa đề cập đến công thức tính diện tích của Elip và việc sử dụng tích phân để tính diện tích Elip là một ứng dụng tuyệt vời.

VD7-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi các cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB=2\pi(m)$, $AD=2(m)$. Tính diện tích đất phần còn lại (đơn vị tính m^2)



A. $4\pi-1$ **B.** $4(\pi-1)$

C. $4\pi-2$ **D.** $4\pi-3$

GIẢI

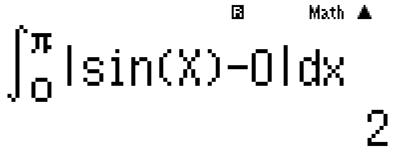
➢ Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là : $S_1=AB.CD=4\pi(m^2)$

➢ Hình sin có biên độ ± 1 và chu kì 2π nên có phương trình là : $y=\sin x$

Gắn hình trên lên trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O là giao điểm của đồ thị hình sin với trục hoành MN

Ta có diện tích hình mầu đen bên phải trục hoành là : $S_2=\int_0^{\pi}|\sin x-0|dx=2$

[SHIFT] [MODE] [4] [∫▭] [SHIFT] [hyp] [sin] [ALPHA] [)] [)] [−] [0] [▼] [0] [▲] [SHIFT] [$\times10^x$] [=]



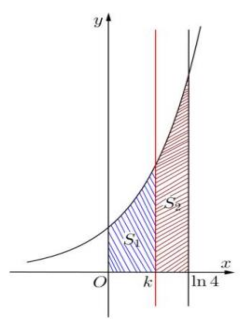
➢ Diện tích cần tìm $=S_1-2S_2=4\pi-4 \Rightarrow$ đáp số chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**

Nếu đề bài thay đổi thành $AD=4$ như vậy biên độ hình sin là ± 2 vậy sẽ có phương trình là $y=2\sin x$

VD8-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$



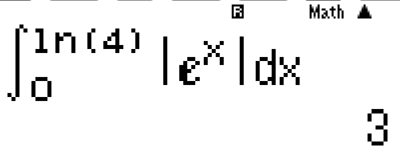
A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$ **B.** $k=\ln 2$

C. $k=\ln\frac{8}{3}$ **D.** $k=\ln 3$

GIẢI

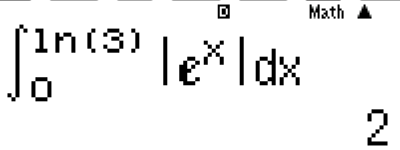
➢ Gọi S là diện tích hình (H) ta có $S=\int_0^{\ln 4}\left|e^x-0\right|dx=3$





➢ Vì $S_1=2S_2$ mà tổng diện tích là 3 $\Rightarrow S_1=2 \Rightarrow \int_0^k \left|e^x\right|dx=2$. Thử các đáp án ta có $k=\ln 3$

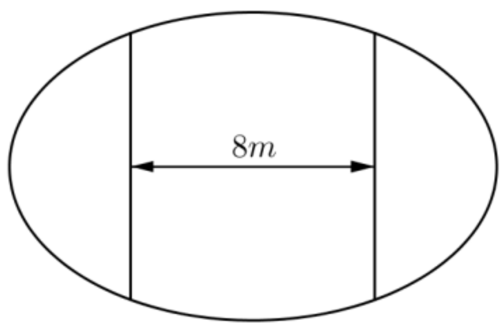




$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD9-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của Elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng 1 m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó ? (Số tiền làm tròn đến hàng ngàn)



A. 7.862.000 **B.** 7.653.000

C. 7.128.000 **D.** 7.826.000

GIẢI

➢ Xét hệ tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, phương trình Elip viền khu vườn là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$

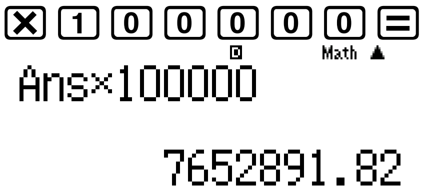
Xét phần đồ thị Elip nằm phía trên trục hoành có $y=5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}$

➢ Diện tích S của dải đất cũng chính bằng 2 lần phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right)$, trục hoành, đường thẳng $x=-4$, đường thẳng $x=4$

$\Rightarrow S=2\int_{-4}^{4}\left|5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}-0\right|dx=76.5389182$



$\Rightarrow$ Số tiền cần là $100.000S$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, đường thẳng $y=2-x$ và trục hoành trong miền $x\ge 0$ bằng :

A. 2 **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Bài 2-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$

A. $\frac{8}{15}$ **B.** $\frac{14}{15}$ **C.** $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{6}{15}$

Bài 3-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\left|x^2+1\right|$ và $y=\left|x\right|+3$ bằng :

A. $\frac{10}{4}$ **B.** $\frac{20}{3}$ **C.** $\frac{40}{3}$ **D.** $\frac{52}{3}$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$ và đồ thị hàm số $y=3-x$ và trục tung

A. $\frac{5}{2}-\frac{1}{\ln 2}$ **B.** $3-\frac{1}{\ln 2}$ **C.** $5-\frac{3}{\ln 2}$ **D.** $2+\frac{1}{\ln 2}$

Bài 5-[Đoàn Quỳnh -Sách bài tập trắc nghiệm toán 12]

Biết diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ có thể được viết dưới dạng $S=a\left(1-\frac{1}{e}\right)$. Tìm khẳng định sai :

A. $a^2-3a+2=0$ **B.** $a^2-a-2=0$ **C.** $a^2+3a-4=0$ **D.** $2a^2-3a-2=0$

Bài 6-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(P): y = x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến với (P) đi qua các điểm $A(2;-2)$ là :

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{64}{3}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** $\frac{40}{3}$

Bài 7-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}$ $(a > 0)$, trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k

A. $k = \frac{7}{3}$ **B.** $k = \frac{4}{3}$ **C.** $k = \frac{12}{5}$ **D.** $k = \frac{6}{5}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

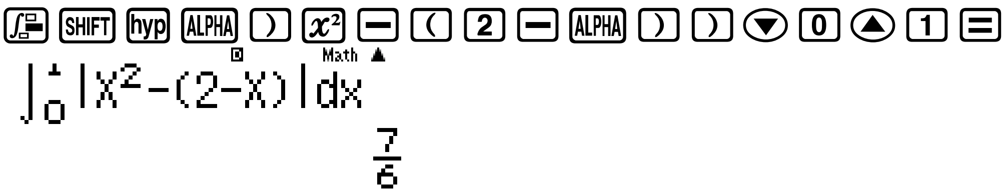
Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành trong miền $x \ge 0$ bằng :

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Tuy nhiên đề bài yêu cầu tính diện tích trên miền $x \ge 0$ $\Rightarrow$ Ta tính diện tích hình phẳng trên miền $[0;1]$
  $\Rightarrow$ Cận thứ nhất $x = 0$, cận thứ hai $x = 1$.
- Diện tích cần tính là : $S = \int_0^1 \left|x^2 - (2-x)\right| dx = \frac{7}{6}$



- Chú ý: Nếu đề bài không yêu cầu tính diện tích hình phẳng trên miền $x \ge 0$ thì ta tính trên toàn bộ miền $[-2;0]$. Ta có : $S = \int_{-2}^{1} \left|x^2 - (2-x)\right| dx = \frac{9}{2}$

  Nếu đề bài yêu cầu tính diện tích hình phẳng trên miền $x \le 0$ thì ta tính trên miền $[-2;0]$. Ta có :
  $S = \int_{-2}^{0} \left|x^2 - (2-x)\right| dx = \frac{10}{3}$

  Các e học sinh chú ý điều này vì rất dễ gây nhầm lẫn.

Bài 2-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$

A. $\frac{8}{15}$ **B.** $\frac{14}{15}$ **C.** $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{6}{15}$

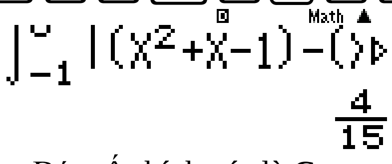
GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

  $\Rightarrow$ Ta có cận thứ nhất $x = -1$, cận thứ hai 0 , cận thứ ba $x = 1$

- Diện tích cần tính là : $S=\int_{-1}^{0}\left|\left(x^2+x-1\right)-\left(x^4+x-1\right)\right|dx+\int_{0}^{1}\left|\left(x^2+x-1\right)-\left(x^4+x-1\right)\right|dx=\frac{4}{15}$

[∫▭] [SHIFT] [hyp] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [−] [(] [ALPHA] [)] [x■] [4] [▶] [+] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [▼] [−] [1] [▲] [0] [▶] [+] [∫▭] [SHIFT] [hyp] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [−] [(] [ALPHA] [)] [x■] [4] [+] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [▼] [0] [▲] [1] [=]



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

- Chú ý: Em nào hiểu phép biến đổi tính diện tích thì có thể bấm máy theo công thức $S=\int_{-1}^{0}\left|x^2-x^4\right|dx+\int_{0}^{1}\left|x^2-x^4\right|dx$ sẽ rút gọn được thao tác bấm máy.

Bài 3-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\left|x^2+1\right|$ và $y=|x|+3$ bằng :

A. $\frac{10}{4}$ **B.** $\frac{20}{3}$ **C.** $\frac{40}{3}$ **D.** $\frac{52}{3}$

GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2+1\right|=|x|+3\Leftrightarrow x^2+1=|x|+3\Leftrightarrow x^2-|x|-2=0$ (1).

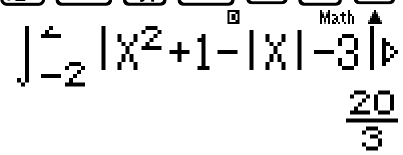
  Với $x\ge 0\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=2$ (vì $x\ge 0$)

  Với $x<0\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-2$ (vì $x<0$)

  $\Rightarrow$ Cận thứ nhất $x=-2$, cận thứ hai $x=2$.

- Diện tích cần tính là : $S=\int_{-2}^{2}\left|\left|x^2+1\right|-\left(|x|+3\right)\right|dx=\frac{20}{3}$

[∫▭] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [−] [3] [▼] [−] [2] [▲] [2] [=]



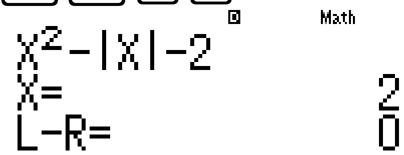
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

- Chú ý: Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối $x^2-|x|-2=0$ có thể giải bằng Casio thay vì chia khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối.

[ALPHA] [)] [x²] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [−] [2] [SHIFT] [CALC] [−] [5] [=]



[SHIFT] [CALC] [5] [=]



$\Rightarrow$ Ta tìm được hai nghiệm $x=-2;x=2$

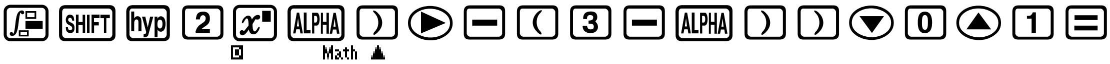
Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

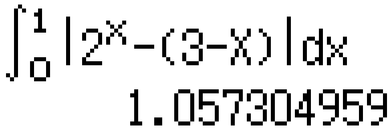
Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$ và đồ thị hàm số $y=3-x$ và trục tung

A. $\frac{5}{2}-\frac{1}{\ln 2}$ **B.** $3-\frac{1}{\ln 2}$ **C.** $5-\frac{3}{\ln 2}$ **D.** $2+\frac{1}{\ln 2}$

GIẢI

- Đề bài cho trục tung có phương trình $x=0$ nên cận thứ nhất là $x=0$
  Phương trình hoành độ giao điểm $2^x=3-x$. $\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ cận thứ hai $x=1$
- Diện tích cần tính là : $S=\int_0^1\left|2^x-(3-x)\right|dx=1.0573...=\frac{5}{2}-\frac{1}{\ln 2}$





$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

- Chú ý: Để giải phương trình $2^x=3-x$ ta có thể sử dụng máy tính Casio





Ta nhận được nghiệm $x=1$. Tuy nhiên vì sao $x=1$ lại là nghiệm duy nhất thì xem lại ở bài *"Sử dụng Casio tìm nghiệm phương trình mũ."*

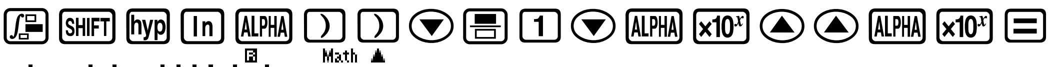
Bài 5-[Đoàn Quỳnh -Sách bài tập trắc nghiệm toán 12]

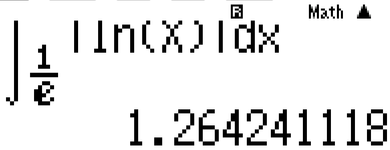
Biết diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ có thể được viết dưới dạng $S=a\left(1-\frac{1}{e}\right)$. Tìm khẳng định sai :

A. $a^2-3a+2=0$ **B.** $a^2-a-2=0$ **C.** $a^2+3a-4=0$ **D.** $2a^2-3a-2=0$

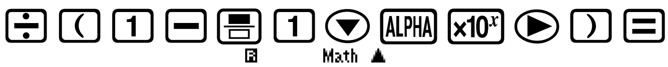
GIẢI

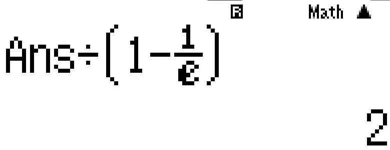
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\ln x$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ là : $S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\ln x-0\right|dx=1.2642...$





- Vì $S=a\left(1-\frac{1}{e}\right)\Rightarrow a=\frac{S}{1-\frac{1}{e}}=2$





Chỉ có phương trình ở câu C không chứa nghiệm này $\Rightarrow$ đáp án C là đáp án chính xác

- Chú ý: Bài này không cần dùng đến kiến thức của tích phân vẫn có thể làm được. Đề bài yêu cầu tìm đáp án mà số a không thỏa mãn $\Rightarrow$ a không phải nghiệm chung của các phương trình. Mà nghiệm chung của các phương trình là 2 nên đáp số **C** không thỏa mãn

Bài 6-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(P): y=x^2-2x+2$ và các tiếp tuyến với (P) đi qua các điểm $A(2;-2)$ là :

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{64}{3}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** $\frac{40}{3}$

GIẢI

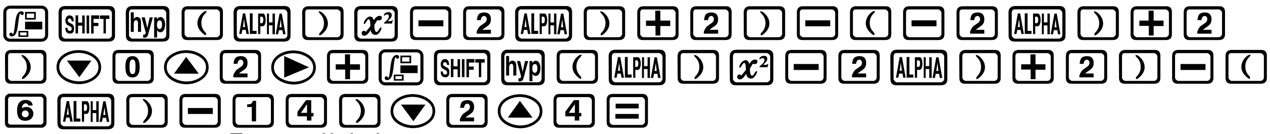
- Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(2;-2)$ ta thu được

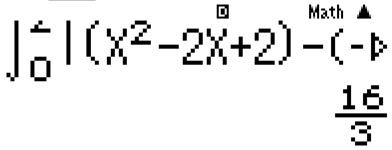
  Tiếp tuyến thứ nhất $y=-2x+2$ với tiếp điểm $B(0;2)$

  Tiếp tuyến thứ hai $y=6x-14$ với tiếp điểm $C(4;10)$

  Ta hiểu hình phẳng cần tính diện tích là phần đường cong có 3 đỉnh A,B,C ta thu được ba cận là : $x=0; x=2; x=4$

  $$\Rightarrow S=\int_0^2\left|\left(x^2-2x+2\right)-\left(-2x+2\right)\right|dx+\int_2^4\left|\left(x^2-2x+2\right)-\left(6x-14\right)\right|dx=\frac{16}{3}$$





  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

- Chú ý: Để biết được tiếp tuyến tại sao lại là $y=-2x+2; y=6x-14$ thì xem lại bài Casio tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số .

  Giải thích công thức (1) : Trên miền $x\in[0;2]$ ta thấy hai cận này được hình thành bởi hai đường cong $y=x^2-2x+2; y=-2x+2$ nên diện tích phải được tính theo công thức

  $$\int_0^2\left|\left(x^2-2x+2\right)-\left(-2x+2\right)\right|dx$$

Bài 7-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=2\sqrt{ax}$ $(a>0)$, trục hoành và đường thẳng $x=a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k

A. $k=\frac{7}{3}$ **B.** $k=\frac{4}{3}$ **C.** $k=\frac{12}{5}$ **D.** $k=\frac{6}{5}$

GIẢI

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành : $2\sqrt{ax}=0\Leftrightarrow x=0$

  Ta được cận thứ nhất $x=0$ và cận thứ hai $x=a$. Khi đó diện tích hình phẳng là :

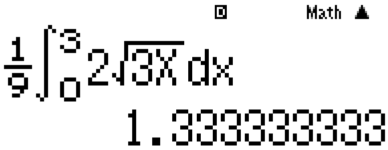
  $$S=\int_0^a\left|2\sqrt{ax}-0\right|dx$$

- Thiết lập quan hệ $\int_0^a\left|2\sqrt{ax}-0\right|dx=ka^2\Leftrightarrow k=\dfrac{\int_0^a\left|2\sqrt{ax}-0\right|dx}{a^2}$. Chọn giá trị dương a bất kì ví dụ

  $a=3$ khi đó $k=\frac{1}{9}\int_0^a\left|2\sqrt{3x}-0\right|dx=1.33(3)=\frac{4}{3}$



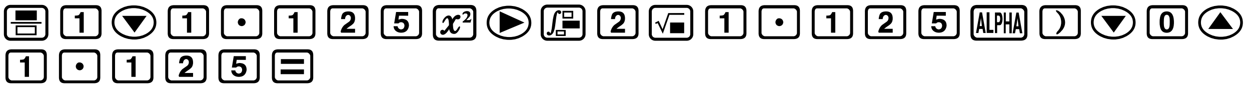
  Ra một kết quả khác 0 vậy đáp án **A** sai

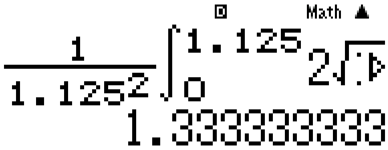


$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

- <u>Chú ý</u>: Dù ta chọn giá trị dương a bất kì thì đáp số k đều ra $\frac{4}{3}$ ví dụ ta chọn $a=1.125$

Khi đó $k=\frac{1}{1.125^2}\int_0^{1.125}\left|2\sqrt{1.125x}-0\right|dx=1.33(3)=\frac{4}{3}$





PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 21. TÍNH NHANH THỂ TÍCH TRÒN XOAY.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Dạng 1 : Thể tích vật thể có diện tích thiết diện $S(x)$ tạo bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm liên tục thì thể tích vật thể tích theo công thức :

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

2. Dạng 2 : Cho hình phẳng (H) tạo bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox thì được vật thể tròn xoay có thể tích tính theo công thức :

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx$$

3. Dạng 3 : Cho hình phẳng (H) tạo bởi các đường $x = f(y)$, $x = g(y)$ và các đường thẳng $y = a$, $y = b$. Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Oy thì được vật thể tròn xoay có thể tích tính theo công thức :

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(y) - g^2(y)\right|dy$$

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa môn Toán Bộ GD-ĐT lần 1năm 2017]

Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi hình (H) quay xung quanh trục Ox

A. $V = 4 - 2e$ **B.** $V = (4 - 2e)\pi$ **C.** $V = e^2 - 5$ **D.** $V = (e^2 - 5)\pi$

GIẢI

- Hình phẳng được giới hạn bởi trục tung $\Rightarrow$ cận thứ nhất là : $x = 0$
  Trục hoành có phương trình $y = 0$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = 2(x-1)e^x$ và trục hoành $\Rightarrow 2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ Vậy cận thứ 2 là : $x = 1$
- Thể tích $V = \pi\int_0^1 \left|\left(2(x-1)e^x\right)^2 - 0^2\right|dx$
  Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân
  SHIFT x10^x ∫□ SHIFT hyp (2 (ALPHA) − 1) ALPHA x10^x x■ ALPHA) ▶) x² ▼ 0 ▲ 1 =
  Math ▲
  $\pi\int_0^1 |(2(X-1)e^X)^2$ ▸
  7.505441089
  $\Rightarrow V = 7.5054... = \pi(e^2 - 5)$
- Vậy ta chọn đáp án **D**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Thể tích $V = \pi\int_0^1 \left|\left(2(x-1)e^x\right)^2 - 0^2\right|dx = 4\pi\int_0^1 (x-1)^2 e^x dx$

- Vì biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $u(x).v'(x)$ nên ta sử dụng tích phân từng phần. Tuy nhiên làm dạng này rất mất thời gian. Tác giả khuyến khích bạn đọc làm theo casio, dành thời gian cho việc tư duy xây dựng công thức để bấm máy.

❖ **Bình luận :**

- Qua ví dụ đầu tiên ta cũng đã thấy ngay sức mạnh của Casio khi xử lý các bài tích phân, các bài ứng dụng tích phân so với cách làm tự luận truyền thống.

VD2-[Thi thử Group Nhóm toán lần 3 năm 2017]

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\sqrt{1-x^2}; y=0$ quanh trục Ox

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{3}{4}\pi$ **D.** $\frac{4}{3}\pi$

GIẢI

- Hàm thứ nhất : $y=\sqrt{1-x^2}$, hàm thứ hai : $y=0$

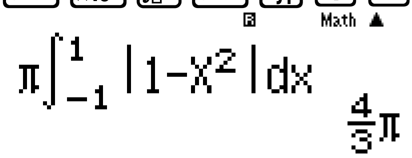
  Giải phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

  $\Rightarrow$ Cận thứ nhất : $x=-1$, cận thứ hai : $x=1$

- Thể tích $V=\pi\int_{-1}^{1}\left|\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-0^2\right|dx$

  Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

  SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp 1 − ALPHA) x² ▼ − 1 ▲ 1 =



  $\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi$

- Vậy ta chọn đáp án **D**

VD3-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho D là miền hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{\sin x}; y=0; x=0; x=\frac{\pi}{2}$. Khi D quay quanh Ox tạo thành một khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay thu được là :

A. 1 **B.** π **C.** 2π **D.** 2

GIẢI

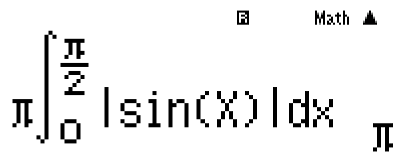
- Hàm thứ nhất : $y=\sqrt{\sin x}$, hàm thứ hai : $y=0$

  Cận thứ nhất : $x=0$, cận thứ hai : $x=\frac{\pi}{2}$

- Thể tích $V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(\sqrt{\sin x}\right)^2-0^2\right|dx$

  Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

  SHIFT MODE 4 SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp sin ALPHA)) ▼ 0 ▲ ÷ SHIFT x10^x ▼ 2 =



$\Rightarrow V = \pi$

- Vậy ta chọn đáp án **B**

VD4-[Sách bài tập giải tích nâng cao lớp 12 T.154]

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2+1}$ và các đường thẳng $y = 0; y = 1$

A. 2π **B.** 3π **C.** $\frac{1}{2}\pi$ **D.** $\frac{3}{2}\pi$

GIẢI

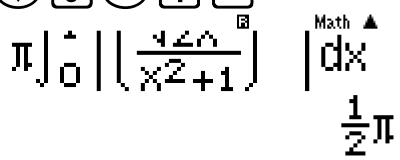
- Hàm thứ nhất $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2+1}$, hàm thứ hai : $x = 0$

  Cận thứ nhất $y = 0$, cận thứ hai $y = 1$

- Thể tích $V = \pi\int_0^1 \left| \left(\frac{\sqrt{2y}}{y^2+1} \right)^2 - (0)^2 \right| dy$

  Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

  SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp (▭/▭ √ 2 ALPHA) ▼ ALPHA) x² + 1 ▶) x² ▼ 0 ▲ 1 =



$\Rightarrow V = \frac{1}{2}\pi$

- Vậy ta chọn đáp án **C**

VD5-[Sách bài tập giải tích nâng cao lớp 12 T.154]

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và các đường thẳng $y = 0, y = 2$:

A. $\frac{5}{3}\pi$ **B.** $\frac{8}{3}\pi$ **C.** $\frac{7}{5}\pi$ **D.** $\frac{3}{5}\pi$

GIẢI

- Xét $y = 2x - x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - y$

  Vì $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$ Khi đó $x - 1 = \pm\sqrt{1-y} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y}$ hàm thứ nhất có dạng $x = 1 + \sqrt{1-y}$, hàm thứ hai : $x = 1 - \sqrt{1-y}$

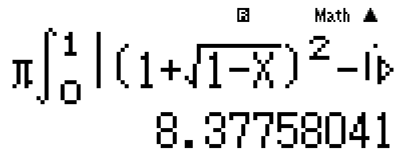
- Phương trình hoành độ giao điểm $1 + \sqrt{1-y} = 1 - \sqrt{1-y} \Leftrightarrow \sqrt{1-y} = 0 \Leftrightarrow y = 1$

  Vì $y \leq 1 \Rightarrow$ cận thứ nhất $x = 0$ và cận thứ hai $y = 1$

- Thể tích $V = \pi\int_0^1 \left| \left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-y}\right)^2 \right| dy$

  Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

  SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp (1 + √ 1 − ALPHA) ▶) x² − (1 − √ 1 − ALPHA) ▶) x² ▼ 0 ▲ 1 =



$\Rightarrow V = 8,3775... = \frac{8}{3}\pi^2$

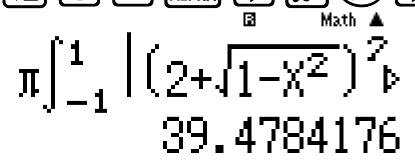
- Vậy ta chọn đáp án **B**

VD6-[Sách bài tập giải tích nâng cao lớp 12 T.154]
Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi hình tròn tròn tâm $I(2;0)$ bán kính $R=1$:

A. 4π **B.** $4\pi^2$ **C.** 5π **D.** $5\pi^2$

GIẢI

- Hàm thứ nhất là đừng tròn tâm $I(2;0)$ bán kính $R=1$ có phương trình
$(x-2)^2+(y-0)^2=1 \Leftrightarrow (x-2)^2=1-y^2$
Vì $(x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 1-y^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$ Khi đó $x-2=\pm\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{1-y^2}$ hàm thứ nhất có dạng $x=2+\sqrt{1-y^2}$, hàm thứ hai : $x=2-\sqrt{1-y^2}$
- Phương trình hoành độ giao điểm $2+\sqrt{1-y^2}=2-\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$
$\Rightarrow$ Cận thứ nhất $y=-1$ cận thứ hai $y=1$
- Thể tích $V=\pi\int_{-1}^{1}\left|\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right|dy$
Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân
[SHIFT] [x10ˣ] [∫] [SHIFT] [hyp] [(] [2] [+] [√] [1] [−] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [)] [x²] [−] [(] [2] [−] [√] [1] [−] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [)] [x²] [▼] [−] [1] [▲] [1] [=]



$\Rightarrow V = 39.4784... = 4\pi^2$
- Vậy ta chọn đáp án **A**

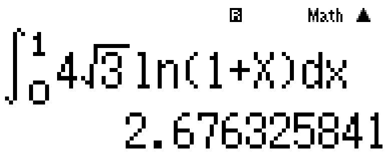
VD7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]
Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 1)$ là một tam giác đều có cạnh là $4\sqrt{\ln(1+x)}$

A. $4\sqrt{3}(2\ln 2-1)$ **B.** $4\sqrt{3}(2\ln 2+1)$ **C.** $8\sqrt{3}(2\ln 2-1)$ **D.** $16\pi(2\ln 2-1)$

GIẢI

- Thiết diện của vật thể và mặt phẳng vuông góc với trục Ox là tam giác đều có diện tích
$$S=S(x)=\frac{\sqrt{3}\left(4\sqrt{\ln(1+x)}\right)^2}{4}=4\sqrt{3}\ln(1+x)$$
- Diện tích $S=S(x)$ là một hàm liên tục trên $[0;1]$ nên thể tích vật thể cần tìm được tính theo công thưc $V=\int_0^1 4\sqrt{3}\ln(1+x)dx = 2.7673... = 4\sqrt{3}(2\ln 2-1)$

[∫] [4] [√] [3] [▶] [ln] [1] [+] [ALPHA] [)] [)] [▼] [0] [▲] [1] [=]



$\Rightarrow$ Ta chọn đáp án **A**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]
Gọi (S) là miền giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=2$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi (S) quay quanh trục Ox :

A. $\frac{31\pi}{5}-\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{31\pi}{5}+\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{31\pi}{5}$ **D.** $\frac{31\pi}{5}+1$

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]
Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(2-x)e^{\frac{x}{2}}$ và hai trục tọa độ

A. $2e^2-10$ **B.** $2e^2+10$ **C.** $\pi(2e^2-10)$ **D.** $\pi(2e^2+10)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang năm 2017]
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin x; x=0; x=\pi$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi mặt phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng :

A. 2π **B.** $\frac{\pi^2}{2}$ **C.** $\frac{\pi^2}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$

Bài 4-[Thi thử Trung tâm Diệu hiền – Cần Thơ lần 1 năm 2017]
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2$, $y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xuong quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$. Khi đó

A. $a=1; b=15$ **B.** $a=-7; \mathrm{b}=15$ **C.** $a=241; b=15$ **D.** $a=16; b=15$

Bài 5-[Câu 54b Sách bài tập giải tích nâng cao 12]
Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^3$, trục tung và hai đường thẳng $y=1, y=2$ quanh trục Oy. Khẳng định nào đúng ?

A. $V>5$ **B.** $V<2$ **C.** $V>4$ **D.** $V<3$

Bài 6-Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$ (C), trục tung . Khi quay hình (S) quanh trục Oy sẽ tạo thành vật thể tròn xoay có thể tích là bao nhiêu ?

A. $V=\frac{5\pi}{2}$ **B.** $V=\frac{9\pi}{4}$ **C.** $V=\frac{11\pi}{4}$ **D.** $V=\frac{8\pi}{3}$

Bài 7-Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi cho hình tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=1$ quay quanh trục Oy

A. $V=4\pi$ **B.** $V=\frac{11}{2}\pi$ **C.** $V=\frac{11\pi^2}{2}$ **D.** $V=4\pi^2$

Bài 8-[Bài 29 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1,\ x=1$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(-1\le x\le 1\right)$ là một hình vuông có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$

A. $\frac{17}{4}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** 5

Bài 9-[Bài 30 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0,\ x=\pi$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0\le x\le \pi\right)$ là một tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\sin x}$

A. $\pi\sqrt{3}$ **B.** $2\pi\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

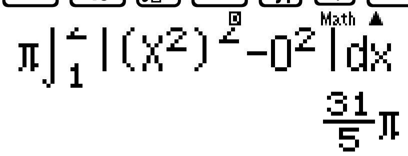
Gọi $\left(S\right)$ là miền giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=2$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi $\left(S\right)$ quay quanh trục Ox :

A. $\frac{31\pi}{5}-\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{31\pi}{5}+\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{31\pi}{5}$ **D.** $\frac{31\pi}{5}+1$

GIẢI

- Đương cong thứ nhất $y=f\left(x\right)=x^2$, đường thứ hai là trục hoành có phương trình $y=g\left(x\right)=0$
- Hình phẳng giới hạn bởi đường cong thứ nhất $y=x^2$, trục hoành $y=0$ và hai đường thẳng $x=1; x=2$ có thể tích là $V=\pi\int_1^2\left|f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right|dx=\pi\int_1^2\left|\left(x^2\right)^2-0^2\right|dx$

SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp (ALPHA) x²) x² − 0 x² ▼ 1 ▲ 2 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

- Chú ý: Chú ý công thức tính thể tích có π và có bình phương của $f^2\left(x\right)$, $g^2\left(x\right)$. Rất nhiều học sinh thường quên những yếu tố này so với công thức tính diện tích.

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left(2-x\right)e^{\frac{x}{2}}$ và hai trục tọa độ

A. $2e^2-10$ **B.** $2e^2+10$ **C.** $\pi\left(2e^2-10\right)$ **D.** $\pi\left(2e^2+10\right)$

GIẢI

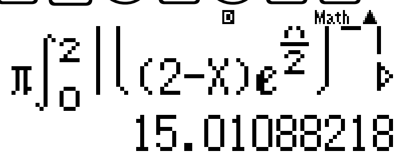
- Hình phẳng được giới hạn bởi đường thứ nhất có phương trình $y=f\left(x\right)=\left(2-x\right)e^{\frac{x}{2}}$ và đường thứ hai là trục hoành có phương trình $y=g\left(x\right)=0$ .Hình phẳng được giới hạn bởi trục tung nên có cận thứ nhất $x=0$. Xét phương trình hoành độ giao điểm đường cong $y=f\left(x\right)$ và trục hoành :

$\left(2-x\right)e^{\frac{x}{2}}=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow$ Cận thứ hai là $x=2$

- Thể tích cần tìm là $V=\pi\int_1^2\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx=\pi\int_0^2\left|\left((2-x)e^{\frac{x}{2}}\right)^2-0^2\right|dx$

$=15.0108...=\pi\left(2e^2-10\right)$

SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp ((2 − ALPHA)) ALPHA x10^x $x^{\blacksquare}$ ▭/▭ ALPHA) ▼ 2 ▶ ▶) x^2 ▼ 0 ▲ 2 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang năm 2017]

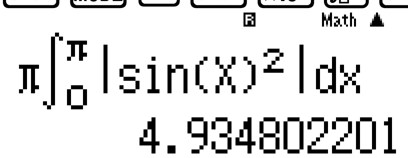
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin x; x=0; x=\pi$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi mặt phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng :

A. 2π **B.** $\frac{\pi^2}{2}$ **C.** $\frac{\pi^2}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$

GIẢI

- Hàm thứ nhất $y=f(x)=\sin x$, hàm thứ hai (của trục Ox) là $y=0$. Cận thứ nhất $x=0$, cận thứ hai $x=\pi$.
- Thể tích cần tìm $V=\pi\int_0^{\pi}\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx=\pi\int_0^{\pi}\left|(\sin x)^2-0^2\right|dx=4.9348...=\frac{\pi^2}{2}$

SHIFT MODE 4 SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp sin ALPHA)) x^2 ▼ 0 ▲ SHIFT x10^x =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

- Chú ý: Để tính tích phân hàm lượng giác ta cần chuyển máy tính về chế độ Radian SHIFT MODE 4

Bài 4-[Thi thử Trung tâm Diệu hiền – Cần Thơ lần 1 năm 2017]

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2$, $y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$. Khi đó

A. $a=1; b=15$ **B.** $a=-7; b=15$ **C.** $a=241; b=15$ **D.** $a=16; b=15$

GIẢI

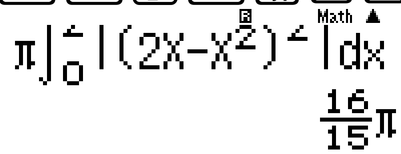
- Phương trình hoành độ giao điểm $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ cận thứ nhất $x=0$ cận thứ hai $x=2$

Ta được cận thứ nhất $x=0$ và cận thứ hai $x=a$. Khi đó diện tích hình phẳng là :

$S=\int_0^a\left|2\sqrt{ax}-0\right|dx$

- Tính thể tích $V=\pi\int_0^{\pi}\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx=\pi\int_0^{\pi}\left|(2x-2)^2-0^2\right|dx=\frac{16}{15}\pi$

SHIFT x10^x ∫ SHIFT hyp (2 ALPHA) − ALPHA)) DEL x^2) x^2 ▼ 0 ▲ 2 =



Mà $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)\Rightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{16}{15}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{15}\Rightarrow a=1;b=15$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

<u>Bài 5</u>-[Câu 54b Sách bài tập giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^3$, trục tung và hai đường thẳng $y=1,\ y=2$ quanh trục Oy . Khẳng định nào đúng ?

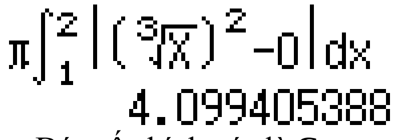
A. $V>5$ **B.** $V<2$ **C.** $V>4$ **D.** $V<3$

GIẢI

- Hình phẳng (H) giới hạn bởi đường thứ nhất $x=f(y)=\sqrt[3]{y}$ và đường thứ hai (trục tung) : $x=0$ .Cận thứ nhất $y=1$ và cận thứ hai $y=2$.
- Theo công thức tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh trục Oy : $V=\pi\int_1^2\left[f^2(y)-g^2(x)\right]dy$

$=\pi\int_1^2\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-0^2\right]dy=4.099...>4$





$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

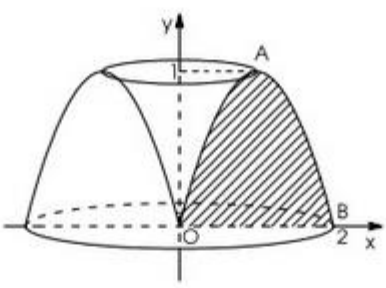
- <u>Chú ý</u>: Để tính thể tích hình phẳng xoay quanh trục Oy thì phải chuyển phương trình đường cong về dạng $x=f(y)$ và $x=g(y)$

<u>Bài 6</u>-Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$ (C) , trục tung . Khi quay hình (S) quanh trục Oy sẽ tạo thành vật thể tròn xoay có thể tích là bao nhiêu ?

A. $V=\frac{5\pi}{2}$ **B.** $V=\frac{9\pi}{4}$ **C.** $V=\frac{11\pi}{4}$ **D.** $V=\frac{8\pi}{3}$

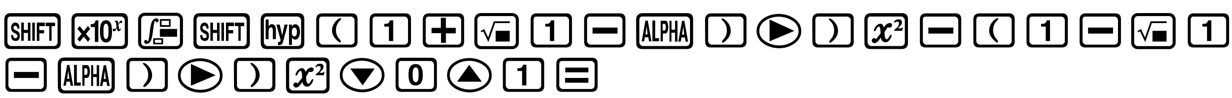
GIẢI

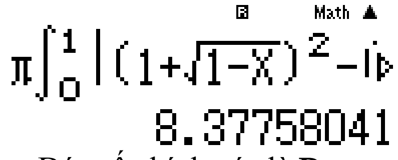
- Xét $y=2x-x^2\Leftrightarrow(x-1)^2=1-y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{1-y}\ (AO)\\x=1-\sqrt{1-y}\ (AB)\end{array}\right.$ với $y\le 1$. Đường cong (C) chia làm 2 nhánh.
- Phương trình tung độ giao điểm hai nhánh : $1+\sqrt{1-y}=1-\sqrt{1-y}\Leftrightarrow\sqrt{1-y}=0\Leftrightarrow y=1$



- Theo công thức tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh trục Oy :

$V=\pi\int_0^1\left[\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-y}\right)^2\right]dy=8.3775...=\frac{8\pi}{3}$





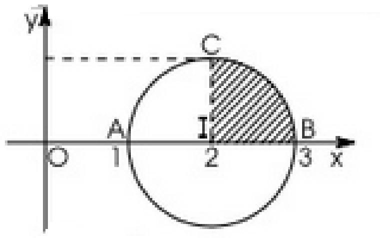
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 7-Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi cho hình tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=1$ quay quanh trục Oy

A. $V=4\pi$ **B.** $V=\frac{11}{2}\pi$ **C.** $V=\frac{11\pi^2}{2}$ **D.** $V=4\pi^2$

GIẢI

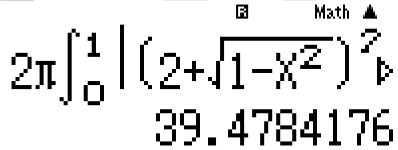
- Phương trình đường tròn $(I;R):(x-2)^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x-2)^2=1-y^2 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{1-y^2}$. Đường tròn (C) chia làm 2 nhánh. $\left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{1-y^2}\ (CB) \\ x=2-\sqrt{1-y^2}\ (CA)\end{array}\right.$



- Theo công thức tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh trục Oy :

$$V=2\pi\int_0^1\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]dy=39.4784...=4\pi^2$$

2 SHIFT $\times10^x$ $\int\square$ SHIFT hyp (2 + $\sqrt{\square}$ 1 − ALPHA) x^2 ▶) x^2 − (2 − $\sqrt{\square}$ 1 − ALPHA) x^2 ▶) x^2 ▼ 0 ▲ 1 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

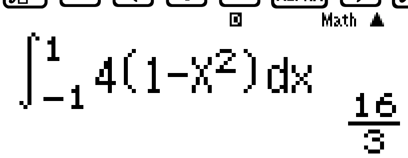
Bài 8-[Bài 29 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]
Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1,\ x=1$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ là một hình vuông có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$

A. $\frac{17}{4}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** 5

GIẢI

- Thiết diện của vật thể tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox là hình vuông . $\Rightarrow$ Diện tích thiết diện $S=S(x)=4\left(1-x^2\right)$.
- Vì hàm $S=S(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ nên vật thể có thể tích là : $V=\int_{-1}^{1}4\left(1-x^2\right)dx=\frac{16}{3}$

$\int\square$ 4 (1 − ALPHA) x^2) ▼ − 1 ▲ 1 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

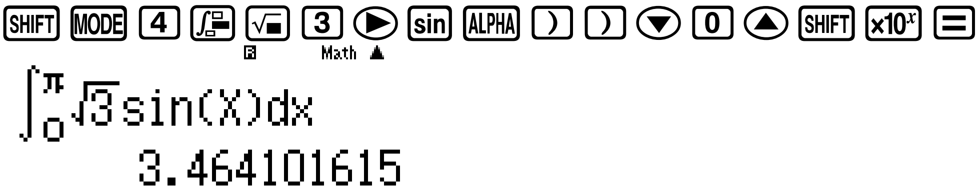
Bài 9-[Bài 30 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=\pi$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0\le x\le \pi\right)$ là một tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\sin x}$

A. $\pi\sqrt{3}$ **B.** $2\pi\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

GIẢI

- Thiết diện của vật thể tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox là tam giác đều $\Rightarrow$ Diện tích thiết diện $S=S\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2}{4}=\sqrt{3}\sin x$.
- Vì hàm $S=S\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;\pi\right]$ nên vật thể có thể tích là : $V=\int_0^{\pi}\sqrt{3}\sin xdx=\dfrac{16}{3}$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

BÀI 22. TÍNH NHANH QUÃNG ĐƯỜNG VẬT CHUYỂN ĐỘNG.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

Quãng đường đi được của một vật : Một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian , $v = f(t)$ trong khoảng thời gian từ t_0 đến t_1 thì quãng đường vật đi được là : $S = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$

2) CÁCH TÍNH NGUYÊN HÀM

VD1-[Câu 24 Đề minh họa BGD-ĐT lần 1 năm 2017]

Một ô tô đang chạy với vận tố $10m/s$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lú bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh tới khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

A. $0,2m$ **B.** $2m$ **C.** $10m$ **D.** $20m$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta có quãng đường $S(t) = v(t).t$. Vi phân 2 vế the t ta được

$S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$

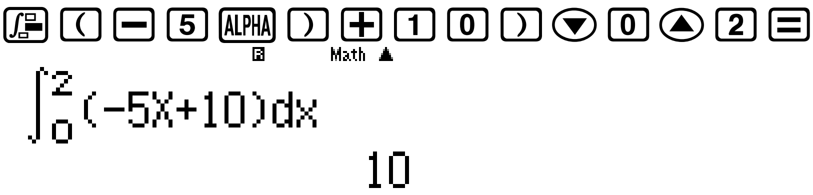
$\Rightarrow S(t)$ là 1 nguyên hàm của $v(t)$ $\Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$

➢ Khi xe dừng hẳn thì vận tốc tại điểm dừng $= 0 \Leftrightarrow 0 = -5t + 10 \Leftrightarrow t = 2$

Chọn gốc thời gian $t_0 = 0$ thì $t_1 = 2$

Quãng đường là $S = \int_0^2 (-5t + 10)dt$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân



Quãng đường $S = 10m$. Vậy đáp án chính xác là **C**

❖ **Bình luận :**

- Nhắc lại kiến thức quan trọng nhất của Tích phân : Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$
- Chính áp dụng kiến thức trên ta thấy $S' = v(t)$ $\Rightarrow$ S là một nguyên hàm của $v(t)$ $\Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$

VD2-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Lúc $9h$ sáng, một ô tô bắt đầu xuất phát từ Nhà hát Lớn thành phố Hà Nội đi thành phố Hồ Chí Minh. Trong 1 giờ đầu tiên, vì xe đi trong nội thành nên tốc độ di chuyển chưa nhanh, xe ô tô đi với vận tốc $v(t) = 0,5 + 0,2.\cos \pi t$ *(km/phút)*, trong đó t là thời gian kể từ lúc xe ô tô xuất phát được tính bằng đơn vị phút. Hỏi lúc $9h10'$ x ô tô đi được quãng đường bao nhiêu *km* ?

A. 0,7 **B.** 5 **C.** 0,3 **D.** 5,2

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta có quãng đường $S(t)=v(t).t$. Vi phân 2 vế the t ta được

$S'(t).dt=v(t).dt \Leftrightarrow S'(t)=v(t)$

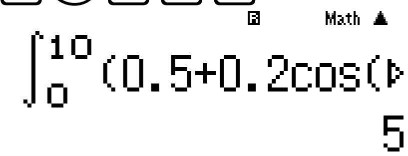
$\Rightarrow S(t)$ là 1 nguyên hàm của $v(t)$ $\Rightarrow S(t)=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$

➢ Chọn gốc thời gian lúc $9h$ là $t_0=0$ thì lúc $9h10'$ là $t_1=10$

Quãng đường là $S=\int_0^{10}(0.5+0.2\cos\pi t)dt$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân

SHIFT MODE 4 ∫ (0 . 5 + 0 . 2 cos SHIFT ×10^x ALPHA))) ▼ 0 ▲ 1 0 =



Quãng đường $S=5m$. Vậy đáp án chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán rất chuẩn mực về phép tính toán, con số ra cũng phản ánh tình trạng tắc xe tồi tệ ở Hà Nội khi $10\,s$ chỉ đi được có $5m$

VD3-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t)=3t+2$, thời gian được tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đó di chuyển được tính theo đơn vị m . Biết tại thời điểm $t=2(s)$ thì vật di chuyển được quãng đường là $10(m)$. Hỏi tại thời điểm $t=30(s)$ thì vật di chuyển được quãng đường dài là bao nhiêu ?

A. $1410m$ **B.** $1140m$ **C.** $300m$ **D.** $240m$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta có quãng đường $S(t)=v(t).t$. Vi phân 2 vế the t ta được

$S'(t).dt=v(t).dt \Leftrightarrow S'(t)=v(t)$

$\Rightarrow S(t)$ là 1 nguyên hàm của $v(t)$ $\Rightarrow S(t)=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$

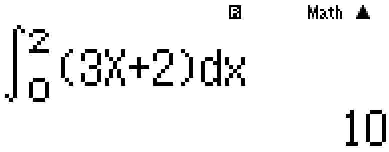
➢ Chọn thời gian lúc đầu là t_0 sau 2 giây thì $t_1=t_0+2$

Quãng đường là $S=\int_{t_0}^{t_0+2}(3t+2)dt$

Để tìm t_0 ta thiết lập quan hệ $\int_{t_0}^{t_0+2}(3t+2)dt=10(m)$. Ta dự đoán t_0 có thể là 0 ; 1; 2… và ta tiến hành thử với $t_0=0$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân

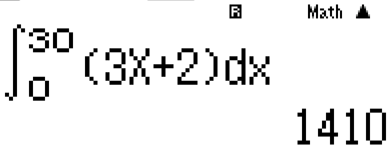
∫ (3 ALPHA) + 2) ▼ 0 ▲ 2 =



Ta thấy kết quả ra $10(m)$ vậy dự đoán của ta đúng và $t_0 = 0$

➤ Quãng đường vật đi được sau 30 giây là : $S_1 = \int_{t_0}^{t_0+30} (3t+2)\,dt = \int_0^{30} (3t+2)\,dt$





Ta thấy $S_1 = 1410(m)$ và **A** là đáp án chính xác

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Mốc thời gian ban đầu không nhất thiết phải bằng 0 tuy nhiên khi sử dụng phép thử để tìm t_0 thì ta luôn ưu tiên $t_0 = 0$

<u>VD4</u>-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Một vận động viên đua F_1 đang chạy với vận tốt $10(m/s)$ thì anh ta tăng tốc với gia tố $a(t) = 6(m/s^2)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu ?

A. $1100m$ **B.** $400m$ **C.** $1010m$ **D.** $1110m$

GIẢI

❖ **<u>Cách 1</u> : CASIO**

➤ Ta có quãng đường $S(t) = v(t).t$. Vi phân 2 vế the t ta được

$S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$

$\Rightarrow S(t)$ là 1 nguyên hàm của $v(t)$ $\Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$

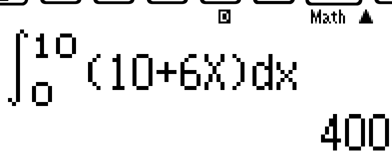
➤ Vận tốc của xe $v(t) = v_0 + a(t) \Rightarrow v(t) = 10 + 6t$

Chọn gốc thời gian lúc xe bắt đầu tăng tốc là $t_0 = 0$ vậy $t_1 = t_0 + 10 = 10$

Quãng đường là $S = \int_0^{10} (10+6t)\,dt$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân





Ta thấy kết quả ra $400(m)$ vậy **B** là đáp án chính xác

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Ta có thể giải theo công thức vật lý : $S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 10.10 + \frac{6.10^2}{2} = 400(m)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

<u>Bài 1</u>-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – HN lần 2 năm 2017]

Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t=0$ chuyển động với vận tốc $v(t)=t(5-t)$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng hẳn

A. $\frac{125}{12}(m)$ **B.** $\frac{125}{9}(m)$ **C.** $\frac{125}{3}(m)$ **D.** $\frac{125}{6}(m)$

Bài 2-[Thi thử Group nhóm toán Facebook năm 2017]

Học sinh lần đầu thử nghiệm tên lửa tự chế phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc $15m/s$ Hỏi sau $2.5s$ tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu ? Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực $g=9.8(m/s^2)$

A. $62.25m$ **B.** $6.875m$ **C.** $68.125m$ **D.** $30.625m$

Bài 3-[Bài 15 trang 153 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Một vật đang chuyển động với vận tốc $v=10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2(m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

A. $996m$ **B.** 1200 **C.** $1680m$ **D.** $3600m$

Bài 4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s). Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian $1,5$ giây chính xác đến $0,01(m)$ là :

A. $0,32m$ **B.** $0,33m$ **C.** $0,34m$ **D.** $0,35m$

Bài 5-[Thi thử nhà sách Lovebook lần 1 năm 2017]

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ với a,b là các tham số. Ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^m$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

A. $8400m^3$ **B.** $2200m^3$ **C.** $600m^3$ **D.** $4200m^3$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

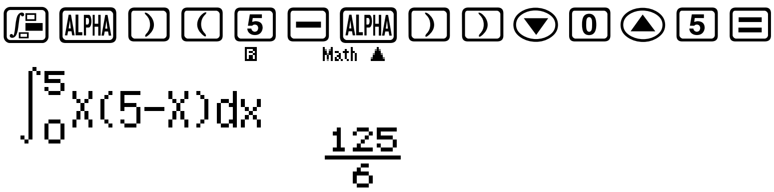
Bài 1-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – HN lần 2 năm 2017]

Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t=0$ chuyển động với vận tốc $v(t)=t(5-t)$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng hẳn

A. $\frac{125}{12}(m)$ **B.** $\frac{125}{9}(m)$ **C.** $\frac{125}{3}(m)$ **D.** $\frac{125}{6}(m)$

GIẢI

- Thời điểm $t_0=0$ vật ở trạng thái nghỉ. Tại thời điểm t_1 $(t_1>t_0)$ vật dừng lại hẳn khi đó $v(t)=0$ $\Leftrightarrow t_1(5-t_1)=0\Leftrightarrow t_1=5$
- Vận tốc là một hàm biến thiên theo thời gian, đồng thời $v(t)$ liên tục trên miền $[0;5]$ $\Rightarrow$ Quãng đường vật di chuyển từ trạng thái nghỉ đến khi dừng hẳn là : $\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt=\int_0^5 t(5-t)dt=\frac{125}{6}$



$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Chú ý : Vận tốc của vật theo thời điểm nếu biểu diễn trên trục tọa độ Oxy sẽ là một Parabol . Dựa vào đó nếu đề bài yêu cầu tìm thời điểm để vật có vận tốc lớn nhất thì ta dựa vào tọa độ đỉnh của Parabol suy ra $t=\frac{5}{2}$ và vận tốc lớn nhất vật có thể đạt được là $v\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}(m/s)$

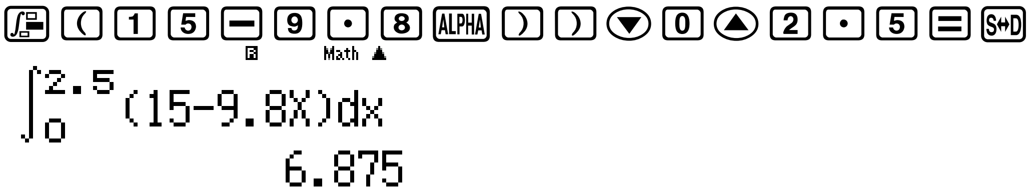
Bài 2-[Thi thử Group nhóm toán Facebook năm 2017]

Học sinh lần đầu thử nghiệm tên lửa tự chế phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc $15m/s$ Hỏi sau $2.5s$ tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu ? Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực $g=9.8\left(m/s^2\right)$

A. $62.25m$ **B.** $6.875m$ **C.** $68.125m$ **D.** $30.625m$

GIẢI

- Phương trình vận tốc theo thời gian $v(t)=v_0+gt=15-9.8t$
- Vì hàm $v(t)$ liên tục trên miền $[0;2.5]$ nên quãng đường vật di chuyển từ thời điểm $t_0=0$ đến thời điểm $t_1=2.5(s)$ được tính theo công thức : $S=\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt=\int_0^{2.5}(15-9.8t)dt=6.875(m)$



$\Rightarrow$ Nếu chọn thì chọn đáp án **B**

Chú ý : Nếu xét theo phân loại dạng vật lý thì đây là dạng bài chuyển động thẳng đứng

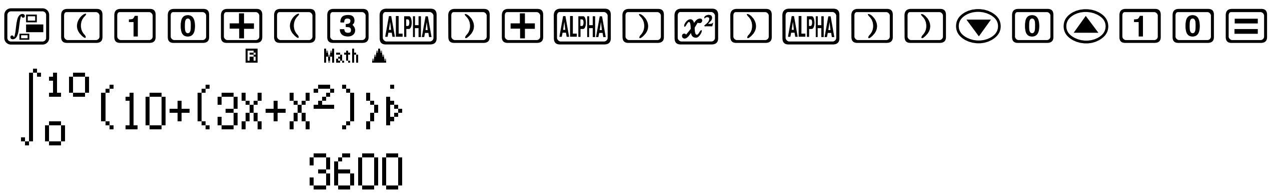
Bài 3-[Bài 15 trang 153 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Một vật đang chuyển động với vận tốc $v=10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường vật đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

A. $996m$ **B.** 1200 **C.** $1680m$ **D.** $3600m$

GIẢI

- Ta có vận tốc $v(t)=v_0+at=10+\left(3t+t^2\right)t$ và $v(t)$ là một hàm biến thiên theo thời gian và liên tục trên R $\Rightarrow$ Quãng đường vật di chuyển từ thời điểm $t_0=0$ đến thời điểm $t_1=10$ được tính theo công thức $S=S(t)=\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt=\int_0^{10}\left(10+\left(3t+t^2\right)t\right)dt=966(m)$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Chú ý : Ta phải nhớ rõ công thức $v(t)=v_0+at$ với $a=3t+t^2$ tránh nhầm lẫn $at=3t+t^2$

$\Rightarrow v(t)=10+3t+t^2$ là sai

Bài 4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

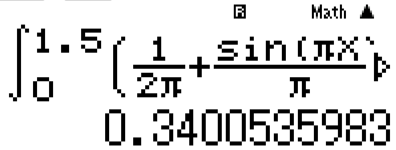
Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s) . Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian $1,5$ giây chính xác đến $0,01(m)$ là :

A. $0,32m$ **B.** $0,33m$ **C.** $0,34m$ **D.** $0,35m$

GIẢI

- Vận tốc $v(t)$ là một hàm biến thiên theo thời gian $\Rightarrow$ Quãng đường vật di chuyển từ lúc bắt đầu tới thời điểm 1,5 giây là : $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \int_0^{1.5}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)dt = 0.34\ (s)$ (sau khi làm tròn)

SHIFT MODE 4 ∫ (▭/▭ 1 ▼ 2 SHIFT x10ˣ ▶ + ▭/▭ sin SHIFT x10ˣ ALPHA)) ▼ SHIFT x10ˣ ▶) ▼ 0 ▲ 1 • 5 =



$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi thử nhà sách Lovebook lần 1 năm 2017]

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ với a, b là các tham số. Ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^m$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

A. $8400m^3$ **B.** $2200m^3$ **C.** $600m^3$ **D.** $4200m^3$

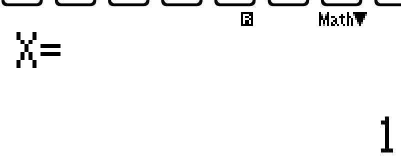
GIẢI

- $h'(t)$ là một hàm biến thiên theo thời gian và liên tục trên R $\Rightarrow$ Thể tích nước bơm được tính theo công thức $V = h(t) = \int_{t_0}^{t_1}(3at^2+bt)dt$
- Tại thời điểm $t_1 = 5$ giây thì $V = \int_0^5 (3at^2+bt)dt = 150(m^3)$ $\Leftrightarrow \left(at^3 + \frac{bt^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 150$

  $\Leftrightarrow 125a + 12.5b = 150$
- Tại thời điểm $t_1 = 10$ giây thì $V = \int_0^{10}(3at^2+bt)dt = 1100(m^3)$ $\Leftrightarrow \left(at^3+\frac{bt^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 1100$

  $\Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases}125a+12.5b=150\\1000a+50b=1100\end{cases}$

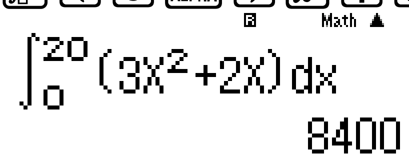
MODE 5 1 1 2 5 = 1 2 • 5 = 1 5 0 = 1 0 0 0 = 5 0 = 1 1 0 0 = = =





Vậy tại thời điểm $t_1 = 20$ thì thể tích $V = \int_0^{20}(3t^2+2t)dt = 8400$ $\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

∫ (3 ALPHA) x² + 2 ALPHA)) ▼ 0 ▲ 2 0 =



PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 23. GIẢI NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỐNG LẠI CASIO.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Kỹ thuật ép hệ phương trình : Cho hệ thức $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(a,b,c)$, muốn tìm a,b,c thỏa mãn hệ thức $h(a,b,c)=m$. Ta sẽ tính giá trị tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx =$ rồi lưu vào A .

Vậy ta sẽ ép được hệ phương trình $\begin{cases} f(a,b,c)=A \\ h(a,b,c)=m \end{cases}$. Để giải hệ phương trình này ta sẽ sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE hoặc chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio *(Xem ví dụ minh họa 1, 2, 3, 4, 5, 6)*

2.Kỹ thuật ép cận nguyên hàm : Cho nguyên hàm gốc $\int f(x)dx$ và nguyên hàm hệ quả $\int f(u(t))dt$ qua phép đổi biến $x=u(t)$. Để sử dụng được máy tính Casio ta ép hệ số cho nguyên hàm gốc để trở thành tích phân xác định $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Vì nguyên hàm gốc và nguyên hàm hệ quả là tương đương nên $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} f(u(t))dx$ (α',β' là 2 cận mới)

(Xem ví dụ minh họa 7,8,9)

2) VÍ DỤ MINH HỌA

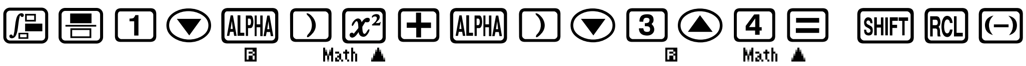
VD1-[Câu 26 Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

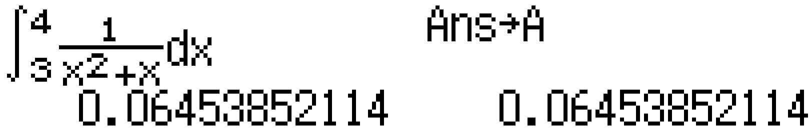
Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$

A. $S=6$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=0$

GIẢI

- Tính tích phân $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}$ và lưu vào biến A





- Khi đó $A=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5 \Leftrightarrow A=\ln(2^a.3^b.5^c) \Leftrightarrow 2^a.3^b.5^c = e^A = \frac{16}{15}$





Dễ thấy $\frac{16}{15}=\frac{2.2.2.2}{3.5}=2^4.3^{-1}.5^{-1}=2^a.3^b.5^c \Rightarrow a=4;\ b=-1;\ c=-1 \Rightarrow S=2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD2-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

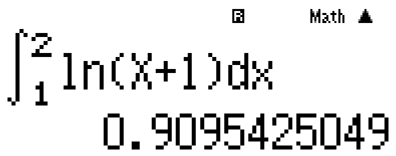
Cho $I=\int_1^2 \ln(x+1)dx = a\ln 3 + b\ln 2 + c \quad (a,b,c\in Z)$. Tính giá trị của biểu thức $A=a+b+c$

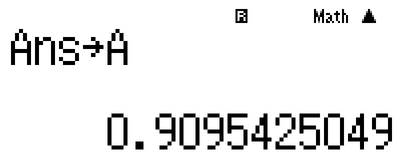
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

GIẢI

➢ Tính giá trị tích phân $I=\int_1^2 \ln(x+1)dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

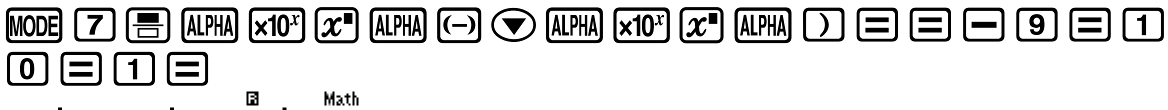


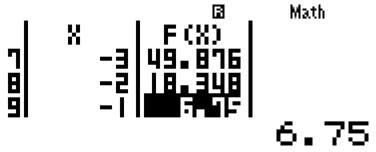




➢ Khi đó $a\ln 3+b\ln 2+c=A \Leftrightarrow \ln(3^a.2^b.e^c)=\ln e^A \Leftrightarrow 3^a.2^b.e^c=e^A \Leftrightarrow 3^a.2^b=\frac{e^A}{e^c}$

Để tính được $3^a.2^b$ ta sử dụng chức năng MODE 7 với hàm $f(X)=3^a.2^b=\frac{e^A}{e^c}$





Quan sát màn hình xem giá trị nào của $f(X)$ (cũng là của $3^a.2^b$) là số hữu tỉ thì nhận

Dễ thấy với $X=c=-1$ thì $3^a.2^b=6.75=\frac{27}{4}=3^3.2^{-2} \Rightarrow a=3; b=-2$

Tóm lại $a+b+c=3-2-1=0$

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là đáp án chính xác

VD3-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

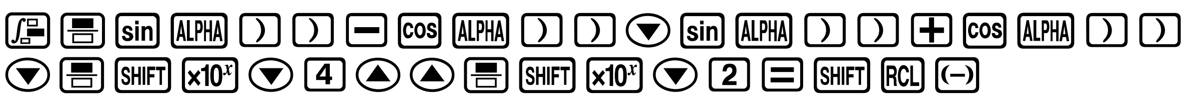
Cho $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=(a+b)\ln 3+c\ln 2 \quad (a,b,c\in Q)$. Tính giá trị của biểu thức :

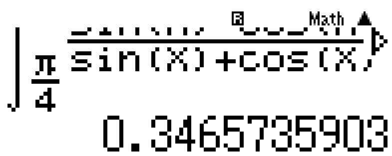
$A=a+b+c$

A. 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

GIẢI

➢ Tính giá trị tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

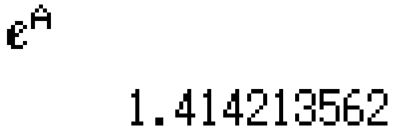






➤ Khi đó $\left(a+b\right)\ln 3+c\ln 2=A\Leftrightarrow \ln(3^{a+b}.2^{c})=\ln e^{A}$. Mà ta tính được $e^{A}=\sqrt{2}$





$\Rightarrow 3^{a+b}.2^{c}=\sqrt{2}=3^{0}.2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow a+b=0;c=\frac{1}{2}$

Tóm lại $a+b+c=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Đáp án **B** là đáp án chính xác

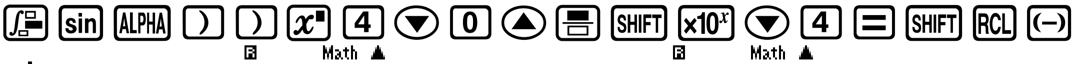
<u>VD4</u>-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

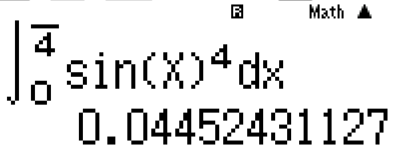
Cho $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{4}xdx=\pi a+b\ \ \left(a,b\in Q\right)$. Tính giá trị của biểu thức $A=a+b$

A. $\frac{11}{32}$ **B.** $-\frac{5}{32}$ **C.** 4 **D.** 7

GIẢI

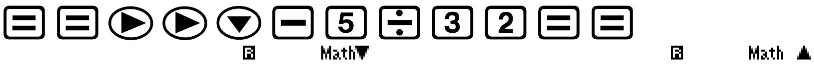
➤ Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}\ln\left(x+1\right)dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A







➤ Khi đó $\pi a+b=A$. Nếu đáp số A đúng thì hệ $\begin{cases}\pi a+b=A\\ a+b=\frac{11}{32}\end{cases}$ có nghiệm hữu tỉ (thuộc Q)







Rõ ràng $a=\frac{3}{32};b=-\frac{1}{4}$ là các số hữu tỉ

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

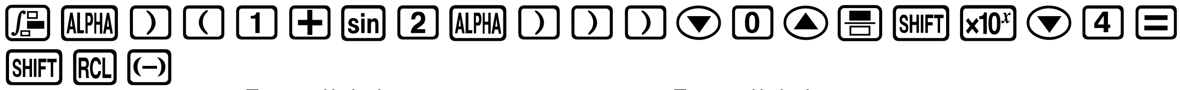
<u>VD5</u>-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

Cho $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\left(1+\sin 2x\right)dx=\frac{\pi^{2}+a}{b}\to\ \left(a,b,c\in Z\right)$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính biểu thức $A=a+b$

A. 20 **B.** 40 **C.** 60 **D.** 10

GIẢI

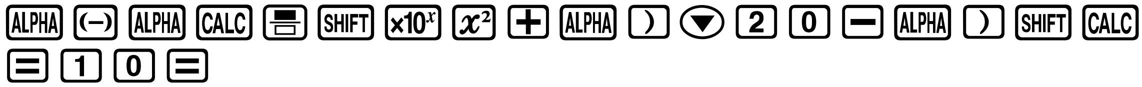
➤ Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\left(1+\sin 2x\right)dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A





➢ Khi đó $\frac{\pi^2+a}{b}=A$. Nếu đáp số **A** đúng thì $a+b=20 \Rightarrow b=20-a \Rightarrow A=\frac{\pi^2+a}{20-a}$

Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE để tìm a (với a là số nguyên)

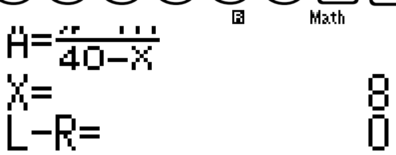




Kết quả không ra một số nguyên $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

➢ Nếu đáp số **B** đúng thì $a+b=40 \Rightarrow b=40-a \Rightarrow A=\frac{\pi^2+a}{40-a}$





Vậy $a=8 \Rightarrow b=32$

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là đáp án chính xác

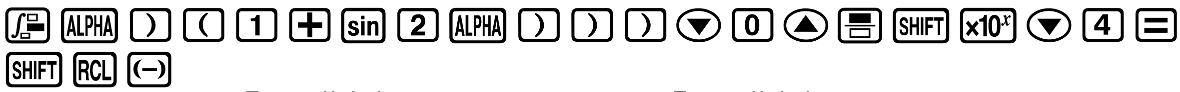
VD6-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

Cho $I=\int_1^2 x^3\ln^2 xdx=\frac{ae^4+b}{c}$ $(a,b,c\in Z)$ với $\frac{a}{c};\frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính biểu thức $A=a+b$

A. 15 **B.** -28 **C.** 36 **D.** 46

GIẢI

➢ Tính giá trị tích phân $I=\int_1^2 x^3\ln^2 xdx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

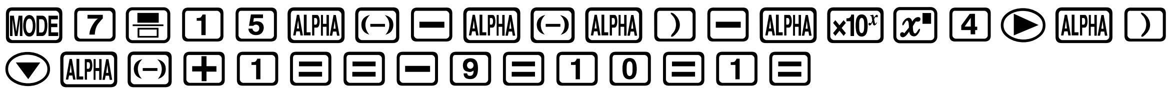


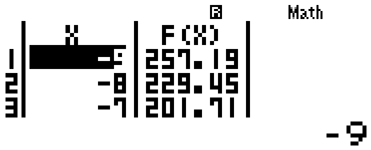


➢ Khi đó $\frac{ae^4+b}{c}=A$. Nếu đáp số **A** đúng thì $c=15-a-b \Rightarrow 15A-a.A-b.A=a.e^4+b$

$\Rightarrow b=\frac{15A-a.A-a.e^4}{A+1}$

Sử dụng chức năng MODE 7 để tìm a (với a là số nguyên)

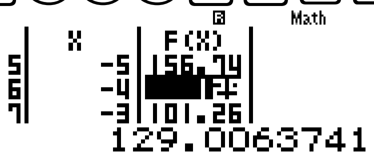




Kết quả không tìm ra một số nguyên $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **C** đúng thì $\Rightarrow b = \dfrac{36A - a.A - a.e^4}{A+1}$

[AC] [▶] [▶] [▶] [DEL] [DEL] [3] [6] [=] [=] [=] [=] [=]



Ta tìm được nghiệm $a = 129$ là một số hữu tỉ

$\Rightarrow$ Đáp án **C** là đáp án chính xác

VD7-[Trích đề thi ĐH khối B năm 2005]

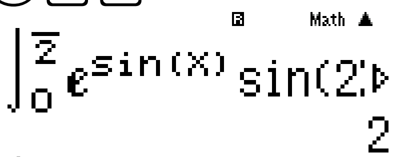
Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$. Nếu đổi biến số $t = \sin x$ thì :

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t.t.dt$ **B.** $I = \int_0^1 e^t.t.dt$ **C.** $I = 2\int_0^1 e^t.t.dt$ **D.** $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t.t.dt$

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$

[∫] [ALPHA] [x10^x] [x■] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▶] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [▼] [0] [▲] [▭] [SHIFT] [x10^x] [▼] [2] [=]



- Nếu đáp án A đúng thì giá trị tích phân ở câu A phải giống giá trị tích phân ở đề bài và cùng bằng 2. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t.t.dt$

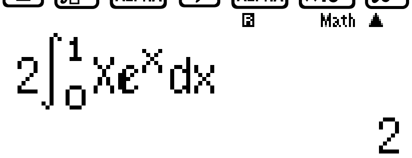
[∫] [ALPHA] [x10^x] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [▭] [SHIFT] [x10^x] [▼] [2] [=]



Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **C** thì $I = 2\int_0^1 e^t.t.dt = 2$

[2] [∫] [ALPHA] [)] [ALPHA] [x10^x] [x■] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [1] [=]



$\Rightarrow$ Đáp án **C** là đáp án chính xác

Chú ý : Đổi cận thì phải đổi biến $\Rightarrow$ Dễ dàng loại được đáp án **A** và **D**

VD8-[Trích đề thi ĐH khối D năm 2011]

Sử dụng phương pháp đổi biến đưa tích phân $I=\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$ thành tích phân $\int_3^5 f(t)dt$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau ?

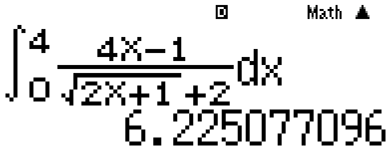
A. $f(t)=\frac{2t^2-3}{t+2}$ **B.** $f(t)=\frac{(2t^2-8t+3)(t+2)}{t}$

C. $f(t)=\frac{2t^2-3}{2(t+2)}$ **D.** $f(t)=\frac{(2t^2-8t+3)(t+2)}{2t}$

GIẢI

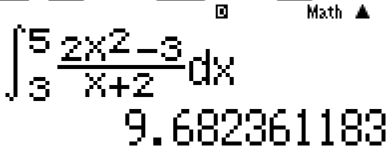
- Tính giá trị tích phân $I=\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$





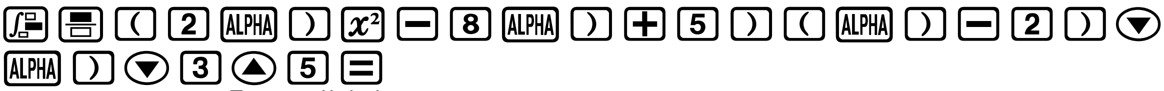
- Nếu đáp án A đúng thì $f(t)=\frac{2t^2-3}{t+2}$ và giá trị tích phân $I=\int_3^5 \frac{2t^2-3}{t+2}dt=6.2250...$điều này là sai vì $I=\int_3^5 \frac{2t^2-3}{t+2}dt=9.6923...$

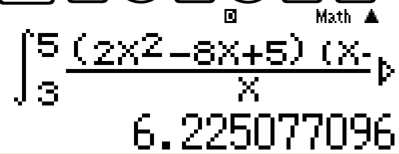




Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **B** chính xác





VD9-Nếu sử dụng phương pháp đổi biến tìm nguyên hàm, ta đặt $t=\sqrt[3]{1+\ln x}$ thì nguyên hàm của $\int \frac{\ln x.\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$ có dạng :

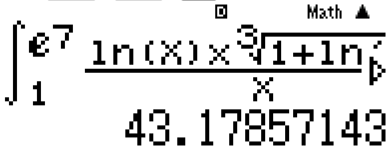
A. $\int 3t^3(t^3-1)dt$ **B.** $\int t^3(t^3-1)dt$ **C.** $\int 3t^3(t^3+1)dt$ **D.** $\int t^3(t^3+1)dt$

GIẢI

- Để có thể sử dụng máy tính Casio ta phải tiến hành chọn cận để đưa nguyên hàm (tích phân bất định) trở thành tích phân (tích phân xác định) Ta chọn hai cận là 1 và e^7 . Tính giá trị tích phân

$$\int_1^{e^7} \frac{\ln x.\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx = 43.1785...$$





- Khi tiến hành đổi biến thì ta phải đổi cận : $\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=\sqrt[3]{1+\ln 1}=1 \\ x=e^7 \Rightarrow t=\sqrt[3]{1+\ln 3^7}=2 \end{array}\right.$ Nếu đáp án A đúng

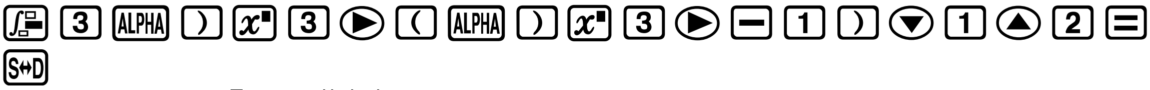
thì giá trị tích phân ở câu A phải giống giá trị tích phân ở đề bài . Tính $I=\int_1^2 3t^3\left(t^3-1\right)dt$

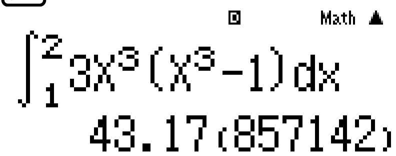




Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **C** thì $I=2\int_0^1 e^t.t.dt=2$





$\Rightarrow$ Đáp án **A** là đáp án chính xác

Chú ý : Ta có thể chọn cận nào cũng được không nhất thiết phải là 1 và e^7 (chỉ cần thỏa mãn tập xác định của hàm số là được)

Ví dụ 3: Nếu $f(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\dfrac{10x^2-7x+2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ thì $a+b+c$ có giá trị là

A. 3 B. 0 C. 4 D. 2

Hướng dẫn by bikiptheluc.com

Trâu bò tự luận

$$\left((ax^2+bx+c)\sqrt{2x-1}\right)'=\frac{5ax^2+(-2a+3b)x-b+c}{\sqrt{2x-1}}=\frac{10x^2-7x+2}{\sqrt{2x-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\Rightarrow a+b+c=2\\ c=1\end{cases}$$

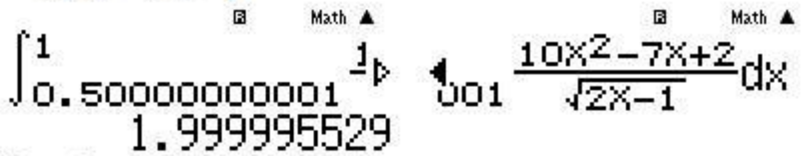
Casio: Tư duy mình nghĩ như sau:

$$\int_a^b \frac{10x^2-7x+2}{\sqrt{2x-1}}dx=F(b)-F(a)$$

Nếu Giờ ta sẽ chọn x sao cho $F(a)=0\to x=0.5$ nhưng các em nhìn giá trị đạo hàm không xác định tại x=0.5 nên ta sẽ lấy giá trị lân cận 0.5

Chú ý là $f(1)=(a+b+c)\to$ Chọn b=1

Thì $\displaystyle\int_{0.5+\Delta x}^{1}\frac{10x^2-7x+2}{\sqrt{2x-1}}dx\approx a+b+c$



Chọn đáp án D.

Nếu mà đề hỏi $4a+2b+c$ thì các em tính tích phân từ $0.5+\Delta x\to 2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=a+b\pi\ \ (a,b\in Q)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=\dfrac{5}{4}$ **B.** $P=\dfrac{3}{4}$ **C.** $P=\dfrac{1}{4}$ **D.** $P=\dfrac{11}{4}$

Bài 2-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $(a,b\in Q)$ $\displaystyle\int_1^2\frac{1-x}{x^2}e^x dx=a.e^2+b.e\ \ (a,b\in Q)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=-1$ **B.** $P=0.5$ **C.** $P=1$ **D.** $P=2$

Bài 3-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x+2\cos x}{2+3\sin x-\cos 2x}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ \ (a,b,c\in Z)$. Tính $P=a+b+c$

A. $P=-3$ **B.** $P=-2$ **C.** $P=2$ **D.** $P=1$

Bài 4-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{2x^2+5x+3}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11\ \ (a,b,c\in Z)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. $P=1$ **B.** $P=-3$ **C.** 2 **D.** 0

Bài 5-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_1^2 \frac{x^2+2x+2}{x^2+x}dx = a\ln 2 + b\ln 3 + c \quad (a,b,c \in Z)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a+b+c$

A. $P=3$ **B.** $P=-2$ **C.** 4 **D.** -1

Bài 6-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t=\sqrt{x^2-1}$ đưa tích phân $I=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ thành tích phân nào sau đây ?

A. $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1}$ **B.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{t^2+1}$ **C.** $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t(t^2+1)}$ **D.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{t(t^2+1)}$

Bài 7-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t=1+3\cos x$ đưa nguyên hàm $I=\int \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ thành nguyên hàm nào sau đây ?

A. $\int \frac{-2t^2-1}{\sqrt{t}}dt$ **B.** $\frac{1}{9}\int \frac{-2t^2-1}{\sqrt{t}}dt$ **C.** $\int \frac{-2t-1}{\sqrt{t}}dt$ **D.** $\frac{1}{9}\int \frac{-2t-1}{\sqrt{t}}dt$

Bài 8-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t=1+3\cos x$ đưa nguyên hàm $I=\int \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ thành nguyên hàm nào sau đây ?

A. $\int \frac{-2t^2-1}{\sqrt{t}}dt$ **B.** $\frac{1}{9}\int \frac{-2t^2-1}{\sqrt{t}}dt$ **C.** $\int \frac{-2t-1}{\sqrt{t}}dt$ **D.** $\frac{1}{9}\int \frac{-2t-1}{\sqrt{t}}dt$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = a + b\pi \quad (a,b \in Q)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=\frac{5}{4}$ **B.** $P=\frac{3}{4}$ **C.** $P=\frac{1}{4}$ **D.** $P=\frac{11}{4}$

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ rồi lưu vào biến A

SHIFT MODE 4 ∫ tan ALPHA)) x² ▼ 0 ▲ ▭ SHIFT ×10ˣ ▼ 4 = SHIFT RCL (−)



- Nếu đáp số **A** đúng ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b\pi = A \\ a+b=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a=1.7334...$ không phải là số hữu tỉ $\Rightarrow$

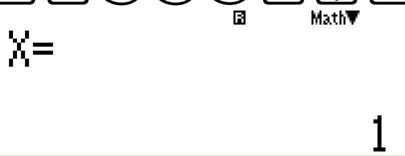
Đáp số **A** sai

MODE 5 1 1 = SHIFT ×10ˣ = ALPHA (−) = 1 = 1 = 5 ÷ 4 = =



- Tương tự như vậy với đáp án **B** ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b\pi=A \\ a+b=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$. $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác







Bài 2-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

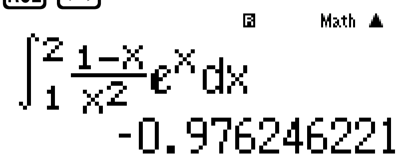
Cho tích phân $(a,b\in Q)$ $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2}e^x dx = a.e^2+b.e$ $(a,b\in Q)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

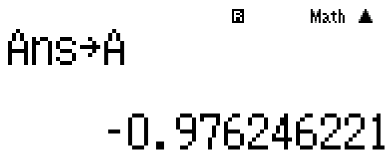
A. $P=-1$ **B.** $P=0.5$ **C.** $P=1$ **D.** $P=2$

GIẢI

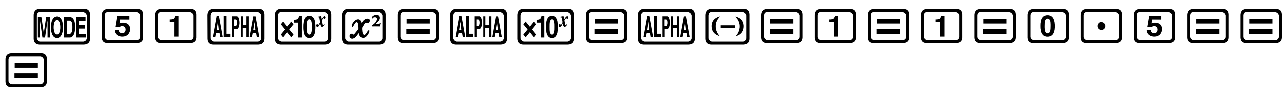
- Tính giá trị tích phân $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2}e^x dx$ rồi lưu vào biến A







- Với đáp số A ta có hệ phương trình $\begin{cases} ae^2+be=A \\ a+b=0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-0.5 \\ b=1 \end{cases}$







$\Rightarrow$ Đáp số **A** chính xác

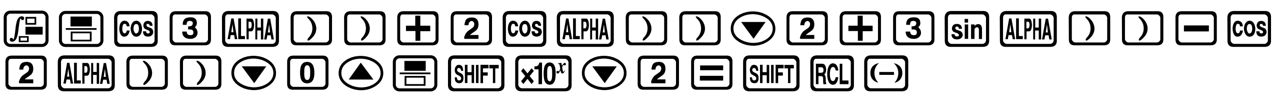
Bài 3-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

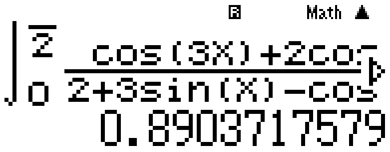
Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x+2\cos x}{2+3\sin x-\cos 2x}dx = a\ln 2+b\ln 3+c$ $(a,b,c\in Z)$. Tính $P=a+b+c$

A. $P=-3$ **B.** $P=-2$ **C.** $P=2$ **D.** $P=1$

GIẢI

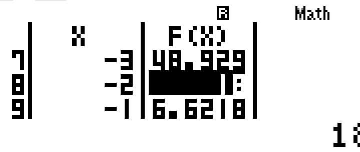
- Tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x+2\cos x}{2+3\sin x-\cos 2x}dx$ rồi lưu vào biến A






- Vậy $a\ln 2+b\ln 3+c=A\Leftrightarrow \ln\left(2^a3^be^c\right)=\ln\left(e^A\right)\Leftrightarrow 2^a.3^b=\dfrac{e^A}{e^c}$. Tìm $2^a.3^b$ bằng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với biến $X=c$

MODE 7 ▭ ALPHA x10^x x^■ ALPHA (−) ▼ ALPHA x10^x x^■ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta được $2^a.3^b=18$ với $X=c=-2$. Vậy $18=2.3^2=2^a.3^b\Rightarrow a=1;\ b=2$

$\Rightarrow P=a+b+c=1+2-2=1\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 4-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

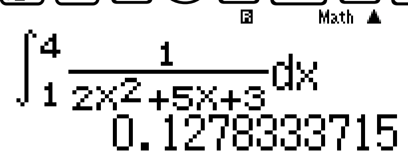
Cho tích phân $\int_1^4\dfrac{dx}{2x^2+5x+3}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11\ \left(a,b,c\in Z\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. $P=1$ **B.** $P=-3$ **C.** 2 **D.** 0

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $\int_1^4\dfrac{dx}{2x^2+5x+3}=$ rồi lưu vào biến A

∫▭ ▭ 1 ▼ 2 ALPHA) x² + 5 ALPHA) + 3 ▼ 1 ▲ 4 = SHIFT RCL (−)




- Vậy $a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11=A\Leftrightarrow \ln\left(2^a5^b11^c\right)=\ln\left(e^A\right)\Leftrightarrow 2^a.5^b.11^c=e^A=\dfrac{25}{22}=\dfrac{5.5}{2.11}=5^2.2^{-1}.11^{-1}$.

Rõ ràng $a=-1;b=2;c=-1\Rightarrow P=a+b+c=1+2-2=1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 5-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

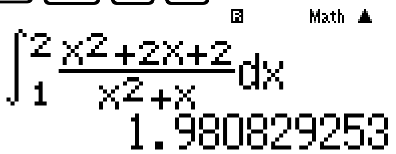
Cho tích phân $\int_1^2\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+x}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ \left(a,b,c\in Z\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. $P=3$ **B.** $P=-2$ **C.** 4 **D.** -1

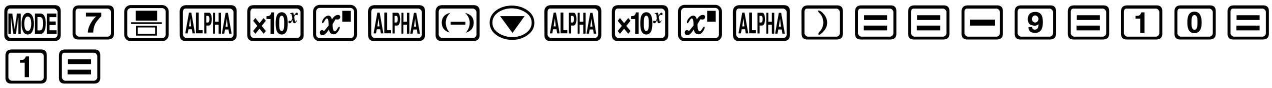
GIẢI

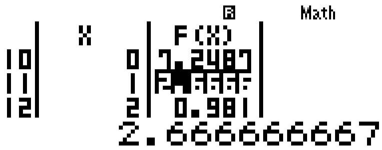
- Tính giá trị tích phân $\int_1^4\dfrac{dx}{2x^2+5x+3}=$ rồi lưu vào biến A

∫▭ ▭ ALPHA) x² + 2 ALPHA) + 2 ▼ ALPHA) x² + ALPHA) ▼ 1 ▲ 2 = SHIFT RCL (−)




- Vậy $a\ln 2+b\ln 3+c=A\Leftrightarrow \ln\left(2^a3^be^c\right)=\ln\left(e^A\right)\Leftrightarrow 2^a.3^b.e^c=e^A\Leftrightarrow 2^a.3^b=\dfrac{e^A}{e^c}$. Tìm $2^a.3^b$ bằng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với biến $X=c$





Ta được $2^a.3^b = 2.66(6) = \frac{8}{3} = 2^3.3^{-1} \Rightarrow a = 3; b = -1$ với $X = c = 1$.

$\Rightarrow P = a + b + c = 3 - 1 + 1 = 3 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 6-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

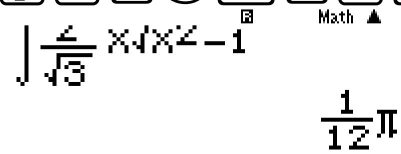
Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t = \sqrt{x^2 - 1}$ đưa tích phân $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ thành tích phân nào sau đây ?

A. $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + 1}$ **B.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{t^2 + 1}$ **C.** $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t(t^2 + 1)}$ **D.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{t(t^2 + 1)}$

GIẢI

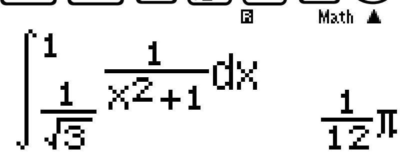
- Tính giá trị tích phân $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}$





Tích phân nào có giá trị bằng $\frac{\pi}{12}$ thì đó là đáp án đúng. Ta có đáp án **B** có giá trị : $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{12}$





$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Chú ý : Giá trị tích phân không thay đổi theo phép đổi biến (đặt ẩn phụ)

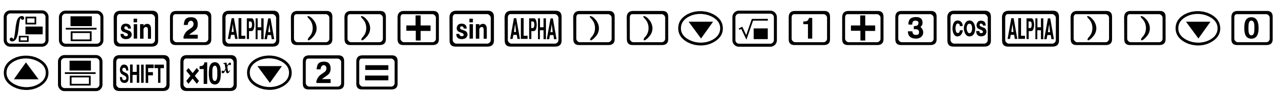
Bài 7-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

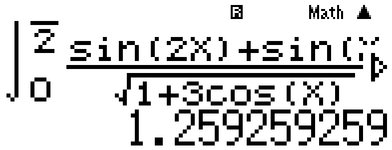
Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t = 1 + 3\cos x$ đưa nguyên hàm $I = \int \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$ thành nguyên hàm nào sau đây ?

A. $\int \frac{-2t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt$ **B.** $\frac{1}{9}\int \frac{-2t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt$ **C.** $\int \frac{-2t - 1}{\sqrt{t}} dt$ **D.** $\frac{1}{9}\int \frac{-2t - 1}{\sqrt{t}} dt$

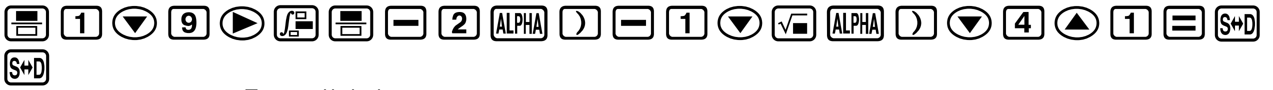
GIẢI

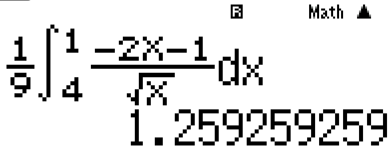
- Chọn cận 0 và $\frac{\pi}{2}$. Tính giá trị tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$





- Tiến hành đổi biến thì phải đổi cận $\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=1+\cos 3x=4 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{array}\right.$
- Với đáp số **D** ta có $-\dfrac{1}{9}\int_4^1 \dfrac{2t+1}{\sqrt{t}}dt$





$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Chú ý : Chọn cận thế nào cũng được tuy nhiên nên chọn cận x sao cho t đẹp.

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 24. TÍNH NHANH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG – MẶT.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{u_{d'}}$ và có hai điểm M, M' thuộc hai đường thẳng trên.
- $d \parallel d'$ nếu $\overrightarrow{u_d} = k.\overrightarrow{u_{d'}}$ và có không có điểm chung
- $d \equiv d'$ nếu $\overrightarrow{u_d} = k.\overrightarrow{u_{d'}}$ và có một điểm chung
- d cắt d' nếu $\overrightarrow{u_d}$ không song song $\overrightarrow{u_{d'}}$ và $\overrightarrow{MM'}\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}}\right] = 0$
- d chéo d' nếu $\overrightarrow{u_d}$ không song song $\overrightarrow{u_{d'}}$ và $\overrightarrow{MM'}\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}}\right] \neq 0$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

- Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ và vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$
- $d \parallel (P)$ nếu $\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P}$ và không có điểm chung
- $d \equiv (P)$ nếu $\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P}$ và có điểm chung
- $d \perp (P)$ nếu $\overrightarrow{u_d} = k.\overrightarrow{n_P}$

3. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$ và đường thẳng $d_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. Vị trí tương đối của d_1, d_2 là :

A.Cắt nhau **B.**Song song **C.**Chéo nhau**D.** Vuông góc

GIẢI

- Ta thấy $\overrightarrow{u_{d_1}}(2;1;-3)$ không tỉ lệ $\overrightarrow{u_{d_2}}(2;2;-1) \Rightarrow (d_1),(d_2)$ không song song hoặc trùng nhau
- Lấy $M_1(-1;1;-1)$ thuộc d_1, lấy $M_2(-3;-2;-2)$ thuộc d_2 ta được $\overrightarrow{M_1M_2}(-2;-3;-1)$

  Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{M_1M_2}\left[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}\right]$ bằng máy tính Casio theo các bước :

  Nhập thông số các vecto $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}$ vào các vecto A, vecto B, vecto C

  MODE 8 1 1 − 2 = − 3 = − 1 = MODE 8 2 1 2 = 1 =
  − 3 = MODE 8 3 1 2 = 2 = − 1 =



Tính $\overrightarrow{M_1M_2}\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$

ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5) =



Ta thấy $\overrightarrow{M_1M_2}\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=0 \Rightarrow$ hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ đồng phẳng nên chúng cắt nhau

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=1+2r\\y=-2-3t\\z=5+4t\end{cases} \text{ và } d':\begin{cases}x=7+3m\\y=-2+2m\\z=1-2m\end{cases}$$

A.Chéo nhau **B.**Cắt nhau **C.**Song song **D.**Trùng nhau

GIẢI

- Ta có hai vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2;-3;4)$ và $\overrightarrow{u_{d'}}(3;2;-2)$ không tỉ lệ với nhau $\Rightarrow$ Không song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp án **C** và **D** là sai
- Chọn hai điểm $M(1;-2;5)$ thuộc d và $M'(7;-2;1)$ thuộc d'.

  Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{M_1M_2}\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$ bằng máy tính Casio theo các bước :

  Nhập thông số các vecto $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}$ vào các vecto A, vecto B, vecto C

  MODE 8 1 1 7 − 1 = − 2 − (− 2) = 1 − 5 = MODE 8 2 1 2 = − 3 = 4 = MODE 8 3 1 3 = 2 = − 2 =



- Tính $\overrightarrow{M_1M_2}\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$

  ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5) =



Ta thấy $\overrightarrow{M_1M_2}\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=-64\neq 0 \Rightarrow$ hai đường thẳng $(d),(d')$ không đồng phẳng nên chúng chéo nhau

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD3-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $(d):\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

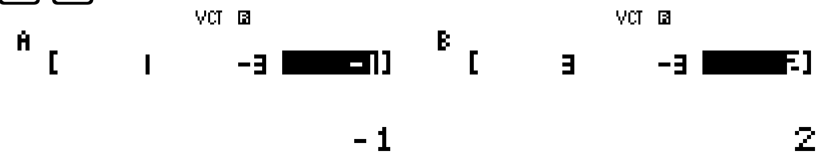
A. d cắt và không vuông góc với (P) **B.** $d\perp(P)$

C. d song song với (P) **D.** d nằm trong (P)

GIẢI

- Ta có $u_d(1;-3;-1)$ và $n_P(3;-3;2)$. Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [−] [3] [=] [−] [1] [=] [MODE] [8] [2] [1] [3] [=] [−] [3] [=] [2] [=]



- Xét tích vô hướng $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=10\Rightarrow\overrightarrow{u_d}$ không vuông góc với $\overrightarrow{n_P}\Rightarrow d,(P)$ không thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là **A** hoặc **B**

[ON] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [=]



- Lại thấy $\overrightarrow{u_d},\ \overrightarrow{n_P}$ không song song với nhau $\Rightarrow d$ không thể vuông góc với $(P)\Rightarrow$ Đáp số **B** sai

Vậy đáp án chính xác là**A**

VD4-[Câu 63 Sách bài tập hình học nâng cao trang 132]

Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d:\dfrac{x-9}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z=3}{3}$ và đường thẳng $(\alpha):x+2y-4z+1=0$

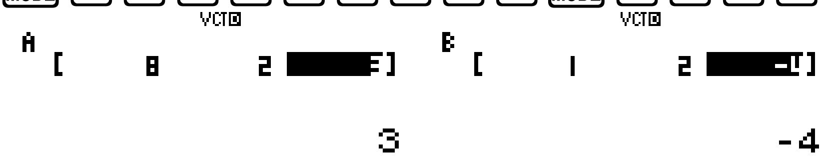
A. d cắt và không vuông góc với (P) **B.** $d\perp(P)$

C. d song song với (P) **D.** d nằm trong (P)

GIẢI

- Ta có $u_d(8;2;3)$ và $n_P(1;2;-4)$. Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

[MODE] [8] [1] [1] [8] [=] [2] [=] [3] [=] [MODE] [8] [2] [1] [1] [=] [2] [=] [−] [4] [=]



- Xét tích vô hướng $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\Rightarrow\overrightarrow{u_d}$ vuông góc với $\overrightarrow{n_P}\Rightarrow d,(P)$ chỉ có thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**

[ON] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [=]



- Lấy một điểm M bất kì thuộc d ví dụ như $M(9;1;3)$ ta thấy M cũng thuộc $(\alpha)\Rightarrow d$ và (α) có điểm chung $\Rightarrow d$ thuộc (α)

Vậy đáp án chính xác là**D**

VD5-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm m để mặt phẳng $(P): 2x - my + 3z - 6 + m = 0$ song song với mặt phẳng $(Q): (m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$

A. $m = 1$ **B.** $m \neq 1$ **C.** $m = -\frac{9}{10}$ **D.** Không tồn tại m

GIẢI

- Ta có hai vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(2; -m, 3)$ và $\overrightarrow{n_Q}(m+3; -2; 5m+1)$

  Để $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} = k.\overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} = k$ (1)

- Với $m = 1$ ta có $k = 2$ thỏa (1)

  Thử lại ta thấy hai mặt phẳng có dạng $\begin{cases} (P): 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ (Q): 2x - 2y + 6z - 10 = 0 \end{cases}$

  Nhận thấy $(P) \equiv (Q) \Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Với $m = -\frac{9}{10}$ ta có $k = \frac{20}{21}$ không thỏa mãn (1) $\Rightarrow m = -\frac{9}{10}$ không nhận $\Rightarrow$ **C** và **B** đều sai

  $\Rightarrow$ Đáp án **D** là chính xác

VD6-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = -2 - 3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 2 = 0$. Giao điểm M của d và P có tọa độ :

A. $M(3;1;-5)$ **B.** $M(2;1;-7)$ **C.** $M(4;3;5)$ **D.** $M(1;0;0)$

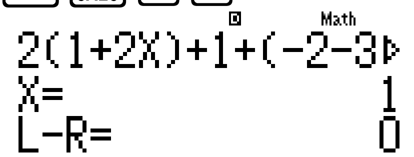
GIẢI

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ $M(1+2t; 1; -2-2t)$. Điểm M cũng thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ điểm M phải thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

  $\Leftrightarrow 2(1+2t) + 1 + (-2-3t) - 2 = 0$

- Công việc trên là ta sẽ nhẩm ở trong đầu , để giải bài toán ta dùng máy tính Casio luôn :

  2 (1 + 2 ALPHA)) + 1 + (− 2 − 3 ALPHA)) − 2 SHIFT CALC 1 =



  Ta tìm được luôn $t = 1$ vậy $x = 1 + 2t = 3$

  $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

VD7-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc và cắt d

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

GIẢI

- Đường thẳng Δ cắt d tại điểm B. Vì B thuộc d nên có tọa độ $B(1+t; t; -1+2t)$

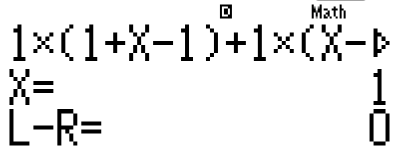
- Ta có : $\Delta \perp d \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0$

  Với $\overrightarrow{AB}(1+t-1;t-0;-1+2t-2)$ và $\overrightarrow{u_d}(1;1;2)$ ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0$

  $\Leftrightarrow 1.(1+t-1)+1(t-0)+2(-1+2t-2)=0$

  Đó là việc nhẩm ở trong đầu hoặc viết ra nháp, nhưng nếu dùng máy tính Casio ta sẽ bấm luôn :

  1 × (1 + ALPHA) − 1) + 1 × (ALPHA) − 0) + 2 × (− 1 + 2 ALPHA) − 2) SHIFT CALC 1 =



  Ta được luôn $t=1 \Rightarrow B(2;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AB}(1;1;-1)$

  $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

VD8-[Câu 74 Sách bài tập hình học nâng cao 12 năm 2017]

Cho hai điểm $A(3;1;0)$, $B(-9;4;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+z+1=0$. Tìm tọa độ của M trên (α) sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M\left(1;1;-\frac{5}{2}\right)$ **B.** $M\left(2;\frac{1}{2};-2\right)$

C. $M\left(1;\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ **D.** $M\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4};3\right)$

GIẢI

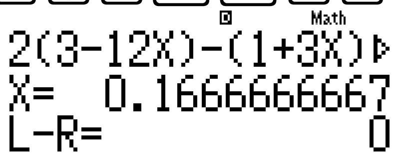
- Nếu A,B,M không thẳng hàng sẽ thì ba điểm trên sẽ lập thành một tam giác. Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có $|MA-MB|<AB$

  Nếu ba điểm trên thẳng hàng thì ta có $|MA-MB|=AB$ nếu A,B nằm khác phía với (α) (điều này đúng) . Theo yêu cầu của đề bài thì rõ ràng A,B,M thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB và (α)

- Ta có : $AB: \begin{cases} x=3-12t \\ y=1+3t \\ z=-9t \end{cases} \Rightarrow M(3-12t;1+3t;-9t)$

  Tìm t bằng máy tính Casio :

  2 (3 − 1 2 ALPHA)) − (1 + 3 ALPHA)) + − 9 ALPHA) + 1 SHIFT CALC 1 =



  Ta được $t=\frac{1}{6} \Rightarrow M\left(1;\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$

  $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y+6z+2017=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $d \parallel (\alpha)$ **B.** d cắt nhưng không vuông góc với (α)

C. $d \perp (\alpha)$ **D.** d nằm trên (α)

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $d:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -2-2t \end{cases}$ và $d':\begin{cases} x = 2+t' \\ y = 1-t' \\ z = 1 \end{cases}$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là :

A.Chéo nhau **B.**Cắt nhau **C.**Song song **D.**Trùng nhau

Bài 3-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình : $\dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$

Xét mặt phẳng $(P):10x+2y+mz+11=0$ với m là tham số thực . Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ

A. $m=-2$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-52$ **D.** $m=52$

Bài 4-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho mặt phẳng $(P): x-3y+z=0$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -1+t \end{cases}$. (P) và Δ cắt nhau tại điểm có tọa độ

A. $(1;2;-1)$ **B.** $(0;-1;3)$ **C.** $(-1;3;-2)$ **D.** $(3;1;0)$

Bài 5-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x = -t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$. Cao độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC) là :

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** -6

Bài 6-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): nx+7y-6z+4=0$, $(Q): 3x+my-2z-7=0$ song song với nhau. Khi đó giá trị m,n thỏa mãn là :

A. $m=\dfrac{7}{3}, n=1$ **B.** $m=9, n=\dfrac{7}{3}$ **C.** $m=\dfrac{3}{7}, n=9$ **D.** $m=\dfrac{7}{3}, n=9$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: x-1 = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y+6z+2017=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

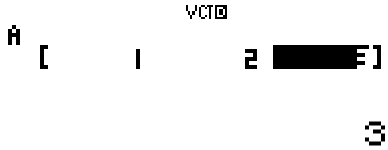
A. $d \parallel (\alpha)$ **B.** d cắt nhưng không vuông góc với (α)

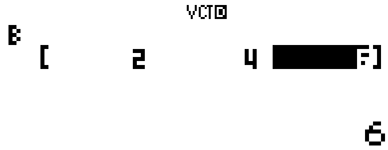
C. $d \perp (\alpha)$ **D.** d nằm trên (α)

GIẢI

- Nhập vecto chỉ phương $\overline{u_d}(1;2;3)$ và vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}(2;4;6)$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 1 = 2 = 3 = MODE 8 2 1 2 = 4 = 6 =





- Tính tích vô hướng $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=28\neq 0\Rightarrow \overrightarrow{u_d}$ không vuông góc $\overrightarrow{n_\alpha}$ $\Rightarrow d$ và (α) không thể song song và không thể trùng nhau

ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =



- Lại thấy tỉ lệ $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\Rightarrow \overrightarrow{u_d}\,||\,\overrightarrow{n_\alpha}\Rightarrow d\perp(\alpha)$

  Vậy đáp số chính xác là **C**

<u>Bài 2</u>-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-2-2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=2+t'\\y=1-t'\\z=1\end{cases}$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là :

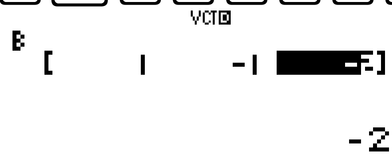
A.Chéo nhau **B.**Cắt nhau **C.**Song song **D.**Trùng nhau

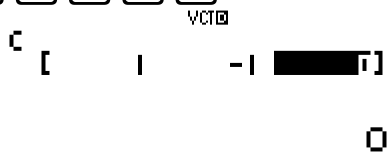
GIẢI

- Vì Xét hai vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1;-1;-2)$ và $\overrightarrow{u_{d'}}(1;-1;0)$ không tỉ lệ với nhau $\Rightarrow$Hai đường thẳng d và d' không thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp án **C** và **D** loại
- Lấy hai điểm thuộc hai đường thẳng là $M(1;2;-2)$ và $M'(2;1;1)$. Nhập ba vecto vào casio

MODE 8 1 1 2 − 1 = 1 − 2 = 1 − (− 2) = MODE 8 5 2 1 1 = − 1 = − 2 = MODE 8 3 1 1 = − 1 = 0 =







- Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right]=0$

ON SHIFT 5 3 SHIFT • DEL SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5) =



$\Rightarrow d,d'$ đồng phẳng (nằm trên cùng một mặt phẳng) $\Rightarrow d$ cắt d'

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

<u>Bài 3</u>-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình : $\frac{x-10}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$

Xét mặt phẳng $(P):10x+2y+mz+11=0$ với m là tham số thực . Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ

A. $m=-2$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-52$ **D.** $m=52$

GIẢI

- Ta có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}(5;1;1)$ và vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(10;2;m)$
- Để mặt phẳng $(P)\perp\Delta$ thì $\overrightarrow{n_P}$ tỉ lệ với $\overrightarrow{u_\Delta}$ (song song hoặc trùng nhau)

$\Rightarrow \frac{10}{5}=\frac{2}{1}=\frac{m}{1}\Rightarrow m=2$

Vậy đáp số chính xác là **B**

Bài 4-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

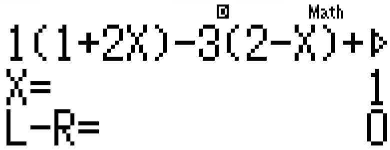
Cho mặt phẳng $(P): x-3y+z=0$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\\ z=-1+t\end{cases}$. (P) và Δ cắt nhau tại điểm có tọa độ

A. $(1;2;-1)$ **B.** $(0;-1;3)$ **C.** $(-1;3;-2)$ **D.** $(3;1;0)$

GIẢI

- Gọi giao điểm là M, vì M thuộc Δ nên $M(1+2t;2-t;-1+t)$
- Tọa độ M thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên ta có thể sử dụng máy tính Casio tìm luôn ra t

[MODE] [1] [1] [(] [1] [+] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [3] [(] [2] [−] [ALPHA] [)] [)] [+] [(] [−] [1] [+] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



$\Rightarrow t=1\Rightarrow M(3;1;0)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 5-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\ y=2+t\\ z=3+t\end{cases}$. Cao độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC) là :

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** -6

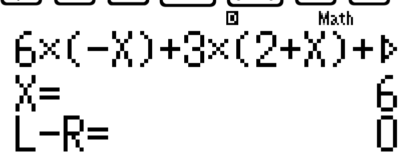
GIẢI

- Mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm thuộc 3 trục tọa độ vậy sẽ có phương trình là :

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-1=0$.

- Gọi giao điểm là $M(-t;2+t;3+t)$. Sử dụng máy tính Casio tìm t

[6] [×] [(] [−] [ALPHA] [)] [)] [+] [3] [×] [(] [2] [+] [ALPHA] [)] [)] [+] [2] [(] [3] [+] [ALPHA] [)] [)] [−] [6] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



Vậy $z=3+t=9$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 6-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): nx+7y-6z+4=0$, $(Q): 3x+my-2z-7=0$ song song với nhau. Khi đó giá trị m,n thỏa mãn là :

A. $m=\frac{7}{3},n=1$ **B.** $m=9,n=\frac{7}{3}$ **C.** $m=\frac{3}{7},n=9$ **D.** $m=\frac{7}{3},n=9$

GIẢI

- Để 2 mặt phẳng song song với nhau thì 2 vecto chỉ phương của chúng song sóng hoặc trùng nhau

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}(n;7;-6)$ tỉ lệ với $\overrightarrow{n_Q}(3;m;-2) \Leftrightarrow \frac{n}{3}=\frac{7}{m}=\frac{-6}{-3}=k$

- Ta thu được tỉ lệ $k=3$ từ đó suy ra $n=9; m=\frac{7}{3}$

  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 25. TÍNH NHANH KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ thì khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức $d(M;(P))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

- Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-x_N}{a}=\dfrac{y-y_N}{b}=\dfrac{z-z_N}{c}$ thì khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d được tính theo công thức $d(M;d)=\dfrac{2\left|\left[\overrightarrow{MN};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$

  Trong đó $\vec{u}(a;b;c)$ là vecto chỉ phương của d và $N(x_N;y_N;z_N)$ là một điểm thuộc d

3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

- Cho hai đường thẳng chéo nhau $d:\dfrac{x-x_M}{a}=\dfrac{y-y_M}{b}=\dfrac{z-z_M}{c}$ và $d':\dfrac{x-x_{M'}}{a'}=\dfrac{y-y_{M'}}{b'}=\dfrac{z-z_{M'}}{c'}$ thì khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau này được tính theo công thức $d(d;d')=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right]\right|}$

  Trong đó $\vec{u}(a;b;c)$ là vecto chỉ phương của d và $M(x_M;y_M;z_M)$ là một điểm thuộc d

  $\vec{u}(a';b';c')$ là vecto chỉ phương của d và $M'(x_{M'};y_{M'};z_{M'})$ là một điểm thuộc d'

4. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)

A. $d=\dfrac{5}{9}$ **B.** $d=\dfrac{5}{29}$ **C.** $d=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ **D.** $d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

GIẢI

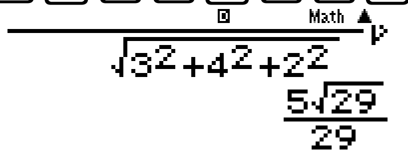
- Ta nhớ công thức tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P):

$$d\left(M;(P)\right)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

➢ Áp dụng cho điểm $A(1;-2;3)$ và $(P):3x+4y+2z+4=0$ ta sử dụng máy tính để bấm luôn :

$$d\left(M;(P)\right)=\frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{29}}$$

[▤] [SHIFT] [hyp] [3] [×] [1] [+] [4] [×] [(] [−] [2] [)] [+] [2] [×] [3] [+] [4] [▼] [√■]
[3] [x²] [+] [4] [x²] [+] [2] [x²] [=]



⟹ Đáp số chính xác là **C**

VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm m để khoảng cách từ $A(1;2;3)$ đến mặt phẳng $(P):x+3y+4z+m=0$ bằng $\sqrt{26}$

A. $m=7$ **B.** $m=18$ **C.** $m=20$ **D.** $m=-45$

GIẢI

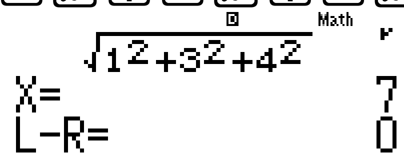
➢ Thiết lập phương trình khoảng cách : $d\left(A;(P)\right)=\frac{|1.1+3.2+4.4+m|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\sqrt{26}$

$\Leftrightarrow \frac{|1.1+3.2+4.4+m|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}-\sqrt{26}=0$

(việc này ta chỉ làm ở trong đầu)

➢ Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập vế trái của phương trình vào rồi sử dụng chức năng SHIFT SOLVE.

[MODE] [1] [▤] [SHIFT] [hyp] [1] [×] [1] [+] [3] [×] [2] [+] [4] [×] [3] [+] [ALPHA] [)] [▼] [√■]
[1] [x²] [+] [3] [x²] [+] [4] [x²] [▶] [▶] [−] [√■] [2] [6] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



Ta thu được kết quả $m=7$

⟹ Đáp số chính xác là **A**

VD3-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+3=0$. M là điểm có hoành độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 2. Tọa độ điểm M là :

A. $M(-2;3;1)$ **B.** $M(-1;5;-7)$ **C.** $M(-2;-5;-8)$ **D.** $M(-1;-3;-5)$

GIẢI

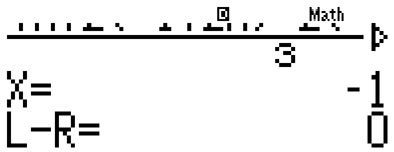
➢ Ta biết điểm M thuộc (d) nên có tọa độ $M(1+t;-1+2t;-2+3t)$

(biết được điều này sau khi chuyển d về dạng tham số $d:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=-2+3t\end{cases}$

➢ Thiết lập phương trình khoảng cách : $d\left(M;(P)\right)=2\Leftrightarrow\frac{|t+2(-1+2t)-2(-2+3t)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2$

Nghĩ được tới đây thì ta có thể sử dụng Casio để tính rồi. Ta bấm ngắn gọn như sau

SHIFT hyp ALPHA) + 2 (− 1 + 2 ALPHA)) − 2 (− 2 + 3 ALPHA)) + 3 ▼ 3 ▶ − 2 SHIFT CALC − 5 =



Khi đó $t=-1 \Rightarrow x=-1; y=-3$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1;)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$

B. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$

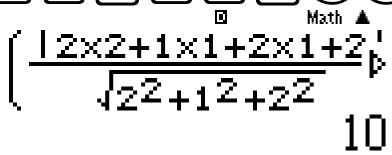
D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

GIẢI

- Mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ sẽ có tâm $I(a;b;c)$. Vì mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ nên nó chỉ có thể là đáp án **C** hoặc **D**
- Ta hiểu : Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn bán kính $r=1$ sẽ thỏa mãn tính chất $R^2=h^2+r^2$ với h là khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng.

  Tính tâm R^2 bằng Casio.

  (▭/▭ SHIFT hyp 2 × 2 + 1 × 1 + 2 × 1 + 2 ▼ √■ 2 x² + 1 x² + 2 x² ▶ ▶) x² + 1 x² =



$\Rightarrow R^2=10$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-2}$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-2;1;-1)$ tới d

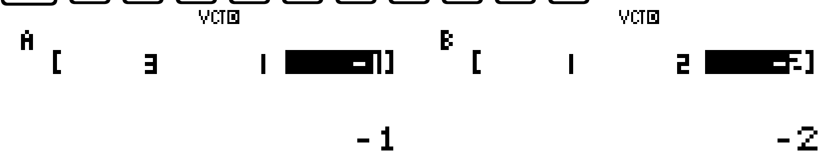
A. $\frac{5}{3}$ **B.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

GIẢI

- Nhắc lại : Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1;2;-2)$ và đi qua điểm $N(1;2;-2)$ có khoảng cách từ M đến d tính theo công thức : $d(M;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$
- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập hai vecto $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{u_d}$ vào máy tính.

MODE 8 1 1 1 − (− 2) = 2 − 1 = − 2 − − 1 =

MODE 8 2 1 1 = 2 = − 2 =



➢ Tính $d(M;d) = 2.357022604 = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD6-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+13=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

A. 5 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

GIẢI

➢ Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$ có tâm $I(1;-3;2)$ bán kính $R=1$

Đường thẳng d đi qua $M(2;1;0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;m;-2)$

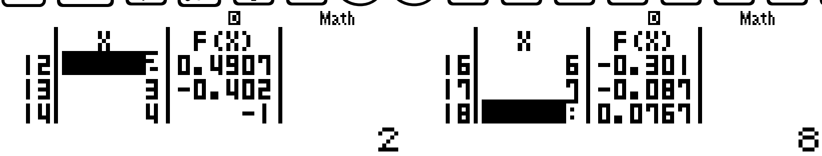
Ta hiểu : Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt nếu khoảng cách từ tâm I (của mặt cầu (S)) đến đường thẳng d nhỏ hơn bán kính R (của mặt cầu (S))

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2+0^2+(4-2m)^2}}{\sqrt{1^2+m^2+(-2)^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2+0^2+(4-2m)^2}}{\sqrt{1^2+m^2+(-2)^2}} - 1 < 0$$

➢ Để giải bài toán ta dùng máy tính Casio với tính năng MODE 7 dò nghiệm của bất phương trình :

MODE 7 ▭ √▭ (8 − 2 ALPHA)) x^2 + (4 − ALPHA)) x^2 ▼ √▭ ALPHA) x^2 + 5 ▶ ▶ − 1 = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của m là $\{-3;-4;-5;-6;-7\}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

VD7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1+mt\\z=-2t\end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+13=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

A. 5 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

GIẢI

- Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$ có tâm $I(1;-3;2)$ bán kính $R=1$

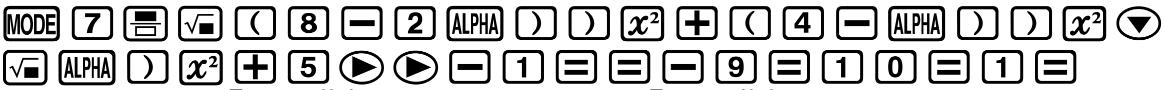
  Đường thẳng d đi qua $M(2;1;0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;m;-2)$

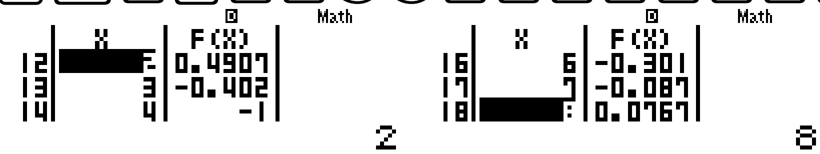
  Ta hiểu : Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt nếu khoảng cách từ tâm I (của mặt cầu (S)) đến đường thẳng d nhỏ hơn bán kính R (của mặt cầu (S))

  $$\Leftrightarrow \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}<1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2+0^2+(4-2m)^2}}{\sqrt{1^2+m^2+(-2)^2}}<1$$

  $$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2+0^2+(4-2m)^2}}{\sqrt{1^2+m^2+(-2)^2}}-1<0$$

- Để giải bài toán ta dùng máy tính Casio với tính năng MODE 7 dò nghiệm của bất phương trình :





  Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của m là $\{-3;-4;-5;-6;-7\}$

  $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

VD8-[Câu 68 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

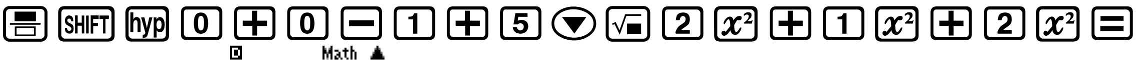
Cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0;0;1)$, có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;1;3)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x+y-z+5=0$. Tính khoảng cách giữa d và (α)

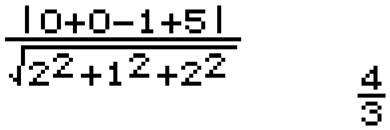
A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{6}{5}$

GIẢI

- Ta thấy : $\vec{u}.\overrightarrow{n_P}=1.2+1.1+3.(-1)=0 \Rightarrow d$ chỉ có thể song song hoặc trùng với (α)
- Khi đó khoảng cách giữa d và (α) là khoảng cách từ bất kì 1 điểm M thuộc d đến (α)

  Ta bấm :





  $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

VD9-[Câu 92 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

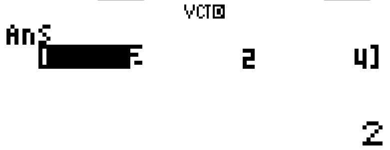
Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t \\ z=4 \end{cases}$. Gọi Δ' là giao tuyến của 2 mặt phẳng $:(P): x-3y+z=0$ và $(Q): x+y-z+4=0$. Tính khoảng cách giữa Δ,Δ'

A. $\frac{12}{\sqrt{15}}$ **B.** $\frac{25}{\sqrt{21}}$ **C.** $\frac{20}{\sqrt{21}}$ **D.** $\frac{16}{\sqrt{15}}$

GIẢI

- Đường thẳng Δ' có vecto chỉ phương $\vec{u'}=\left[\vec{n_P};\vec{n_Q}\right]=(2;2;4)$

MODE 8 1 1 1 = − 3 = 1 = MODE 8 2 1 1 = 1 = − 1 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



Và Δ' đi qua điểm $M'(0;2;6)$

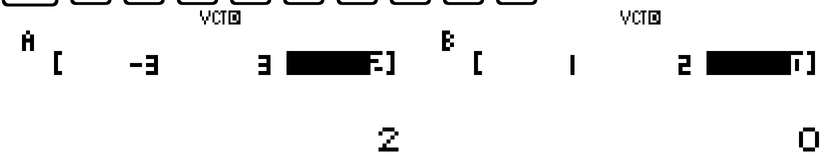
Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;2;0)$ và đi qua điểm $M(3;-1;4)$

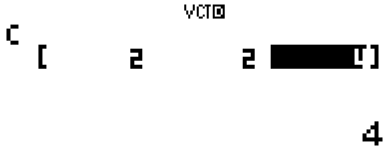
- Ta hiểu : khoảng cách giữa hai đường thẳng chỉ tồn tại khi chúng song song hoặc chéo nhau

Kiểm tra sự đồng phẳng của 2 đường thẳng trên bằng tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}\left[\vec{u};\vec{u'}\right]$

Nhập ba vecto $\overrightarrow{MM'},\vec{u},\vec{u'}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 − 3 = 3 = 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 0 = MODE 8 3 1 2 = 2 = 4 =



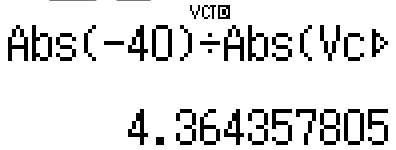


Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}\left[\vec{u};\vec{u'}\right]=-40\neq 0 \Rightarrow \Delta,\Delta'$ chéo nhau

- Tính độ dài hai đường thẳng chéo nhau $\Rightarrow \Delta,\Delta'$ ta có công thức :

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{MM'}\left[\vec{u};\vec{u'}\right]\right|}{\left|\left[\vec{u};\vec{u'}\right]\right|}=4.3640..=\frac{20}{\sqrt{21}}$$

ON SHIFT hyp − 4 0) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5) =



$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD9-[Câu 25 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2}$ và $d':\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d,d' là :

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$ và đi qua điểm $M(2;-1;-3)$

 Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1;1;-1)$

 Dễ thấy hai đường thẳng d,d' song song với nhau nên khoảng cách từ d' đến d chính là khoảng cách từ điểm M' (thuộc d') đến d .

 Gọi khoảng cách cần tìm là h ta có

 $h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MM'};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=1.8856...=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ MODE 8 1 1 − 1 = 2 = 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =



 ⇒ Đáp án chính xác là **B**

VD10-[Câu 26 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=2-2t'\\y=3\\z=t'\end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d và d' có phương trình :

A. $x+5y+2z+12=0$ **B.** $x+5y-2z+12=0$

C. $x-5y+2z-12=0$ **D.** $x+5y+2z-12=0$

GIẢI

- Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$

 Đường thẳng d' có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u'}=(-2;0;1)$ và đi qua điểm $M'(2;3;0)$

 Dễ thấy hai đường thẳng d,d' cheo nhau nên mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng trên khi mặt phẳng đó đi qua trung điểm MM' và song song với cả 2 đường thẳng đó. .

- Mặt phẳng (P) song song với cả 2 đường thẳng nên nhận vecto chỉ phương của 2 đường thẳng là cặp vecto chỉ phương.

 $\Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\left[\vec{u};\overrightarrow{u'}\right]=(-1;-5;-2)$

 MODE 8 1 1 1 = − 1 = 2 = MODE 8 2 1 − 2 = 0 = 1 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



 (P) lại đi qua trung điểm $I(2;2;0)$ của MM' nên $(P): x+5y+2z-12=0$

 ⇒ Đáp án chính xác là **D**

Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$ **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Tìm điểm M trên đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ sao cho $AM=\sqrt{6}$ với $A(0;2;-2)$:

A. $\left[\begin{array}{l}(1;1;0)\\(2;1;-1)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}(1;1;0)\\(-1;3;-4)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}(-1;3;-4)\\(2;1;-1)\end{array}\right.$ **D.** Không có M thỏa

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho $(P):2x-y+z-m=0$ và $A(1;1;3)$. Tìm m để $d(A;(P))=\sqrt{6}$

A. $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=4\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-9\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=10\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=12\end{array}\right.$

Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;-6;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$

A. $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{MA}{MB}=2$ **C.** $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{MA}{MB}=3$

Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách từ điểm $M(2;3;-1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):x+y-2z-1=0$ và $(\alpha'):x+3y+2z+2=0$.

A. $\sqrt{\frac{215}{24}}$ **B.** $\sqrt{\frac{205}{15}}$ **C.** $\frac{205}{\sqrt{15}}$ **D.** $\frac{215}{\sqrt{24}}$

Bài 6-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là :

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$ và $d':\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{4}$

A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ **B.** $\frac{\sqrt{127}}{4}$ **C.** $\sqrt{\frac{386}{3}}$ **D.** $\frac{\sqrt{386}}{3}$

Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ và $d':\begin{cases}x=2-t\\y=-1+t\\z=t\end{cases}$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ **B.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{26}}{13}$ **D.** $\frac{\sqrt{24}}{11}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

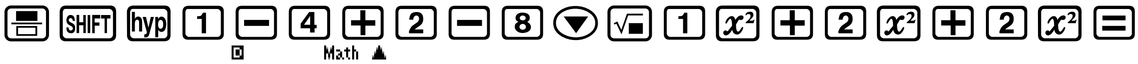
Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y-2z-8=0$?

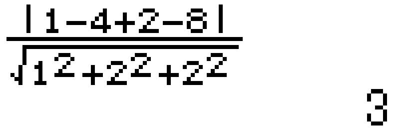
A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$ **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

GIẢI

- Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi $d(I;(P))=R$





$d(I;(P))=3\Rightarrow R^2=9\Rightarrow$ Đáp số chỉ có thể là C hoặc D

- Mà ta lại có tâm mặt cầu là $I(1;2;-1)\Rightarrow(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

  Vậy đáp số chính xác là **D**

<u>Bài 2</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

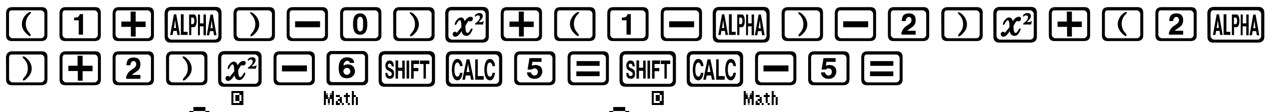
Tìm điểm M trên đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ sao cho $AM=\sqrt{6}$ với $A(0;2;-2)$:

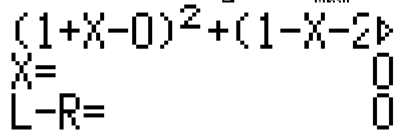
A. $\left[\begin{array}{l}(1;1;0)\\(2;1;-1)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}(1;1;0)\\(-1;3;-4)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}(-1;3;-4)\\(2;1;-1)\end{array}\right.$ **D.** Không có M thỏa

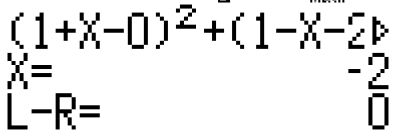
GIẢI

- Gọi điểm M thuộc d có tọa độ theo t là $M(1+t;1-t;2t)$
- Ta có $AM=\sqrt{6}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{6}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-6=0$

  Sử dụng máy tính Casio tìm t







- Ta tìm được hai giá trị của t

  Với $t=0\Rightarrow M(1;1;0)$, với $t=-2\Rightarrow M(-1;3;-4)$

  $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

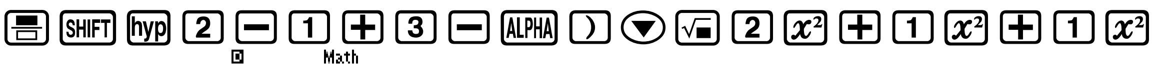
<u>Bài 3</u>-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

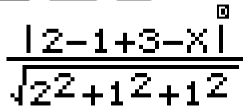
Cho $(P):2x-y+z-m=0$ và $A(1;1;3)$. Tìm m để $d(A;(P))=\sqrt{6}$

A. $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=4\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-9\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=10\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=12\end{array}\right.$

GIẢI

- Thiết lập phương trình khoảng cách $d(A;(P))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\dfrac{|2.1-1+3-m|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\sqrt{6}$
- Đó là khi ta nhẩm, nếu vừa nhẩm vừa điền luôn vào máy tính thì làm như sau (để tiết kiệm thời gian)





Tìm nghiệm ta sử dụng chức năng CALC xem giá trị nào của m làm vế trái $=\sqrt{6}$ thì là đúng

CALC − 2 =

Math ▲

$$\frac{|2-1+3-X|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

$\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ Chỉ có A hoặc C là đúng

CALC 4 =

Math ▲

$$\frac{|2-1+3-X|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

0

Giá trị $m=4$ không thỏa mãn vậy đáp án A sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;-6;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$

A. $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{MA}{MB}=2$ **C.** $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{MA}{MB}=3$

GIẢI

- Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$
- Để tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$ ta sử dụng công thức tỉ số khoảng cách (đã gặp ở chuyên đề hình học không gian)

  Ta có : $\frac{MA}{MB}=\frac{d(A;(Oxz))}{d(B;(Oxz))}$ bất kể hai điểm A, B cùng phía hay khác phía so với (Oxz)

  Ta có thể dùng máy tính Casio tính ngay tỉ số này

MODE 1 ▭ SHIFT hyp 0 + 3 + 0 ▼ SHIFT hyp 0 + − 6 + 0 =

Math ▲

$$\frac{|0+3+0|}{|0+-6+0|}$$

$\frac{1}{2}$

Ta hiểu cả hai mẫu số của hai phép tính khoảng cách đều như nhau nên ta triệt tiêu luôn mà không cần cho vào phép tính của Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách từ điểm $M(2;3;-1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z-1=0$ và $(\alpha'): x+3y+2z+2=0$.

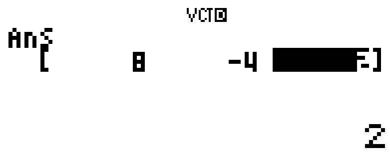
A. $\sqrt{\frac{215}{24}}$ **B.** $\sqrt{\frac{205}{15}}$ **C.** $\frac{205}{\sqrt{15}}$ **D.** $\frac{215}{\sqrt{24}}$

GIẢI

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α') nên cùng thuộc 2 mặt phẳng này $\Rightarrow$ vecto chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d vuông góc với cả 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng trên.

  $\Rightarrow \vec{u}=\left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_{\alpha'}}\right]=(8;-4;2)$

MODE 8 1 1 1 = 1 = − 2 = MODE 8 2 1 0 = 3 = 2 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



- Gọi điểm $N(x;y;0)$ thuộc đường thẳng $d \Rightarrow N\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2};0\right)$
- Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là : $h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3.8265...=\sqrt{\frac{205}{14}}$

MODE 8 1 1 5 ÷ 2 − 2 = − 3 ÷ 2 − 3 = 0 − − 1 = MODE 8 2 1 8 = − 4 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

<u>Bài 6</u>-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là :

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

GIẢI

- Vecto pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;2;2)$

MODE 8 1 1 − 2 = 2 = − 1 = MODE 8 2 1 − 2 = 1 = 0 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



$\Rightarrow (ABC): 1(x-1)+2(y-1)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-9=0$

- Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là $h=\frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

<u>Bài 7</u>-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$ và $d':\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{4}$

A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ **B.** $\frac{\sqrt{127}}{4}$ **C.** $\sqrt{\frac{386}{3}}$ **D.** $\frac{\sqrt{386}}{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-3;4)$ và có vecto chỉ phương $(2;1;-2)$

  Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(-2;1;-1)$ và có vecto chỉ phương $(-4;-2;4)$

  Dễ thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau $\Rightarrow$ Khoảng cách cần tìm là khoảng cách tứ M' đến d

  $=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M'M};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=6.5489...=\frac{\sqrt{386}}{3}$

MODE 8 1 1 − 3 = 4 = − 5 = MODE 8 2 1 2 = 1 = − 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

```
Abs(VctA×VctB)÷▸
        6.548960901
```

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$ và $d':\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{4}$

A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ **B.** $\frac{\sqrt{127}}{4}$ **C.** $\sqrt{\frac{386}{3}}$ **D.** $\frac{\sqrt{386}}{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-3;4)$ và có vecto chỉ phương $(2;1;-2)$

  Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(-2;1;-1)$ và có vecto chỉ phương $(-4;-2;4)$

  Dễ thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau $\Rightarrow$ Khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ M' đến d

  $=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M'M};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=6.5489...=\frac{\sqrt{386}}{3}$

MODE 8 1 1 − 3 = 4 = − 5 = MODE 8 2 1 2 = 1 = − 2 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

```
Abs(VctA×VctB)÷▸
        6.548960901
```

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ và $d':\begin{cases}x=2-t\\y=-1+t\\z=t\end{cases}$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ **B.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{26}}{13}$ **D.** $\frac{\sqrt{24}}{11}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;2;3)$

  Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;-1;0)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u'}(-1;1;1)$

  Dễ thấy 2 đường thẳng trên chéo nhau $\Rightarrow$ Khoảng cách cần tìm là $=\frac{\left|\overrightarrow{MM'}\left[\vec{u};\overrightarrow{u'}\right]\right|}{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{u'}\right]\right|}=0.3922...=\frac{\sqrt{26}}{13}$

MODE 8 1 1 1 = − 3 = − 3 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 3 = MODE
8 3 1 − 1 = 1 = 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4
× SHIFT 5 5)) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5) =

```
Abs(VctA•(VctB×▸
       0.3922322703
```

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 26. TÌM HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một mặt phẳng

- Cho điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ thì hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng (P) là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)
- Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) (Δ nhận $\overrightarrow{n_P}$ làm $\overrightarrow{u_\Delta}$)

2. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một đường thẳng

- Cho điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-x_N}{a}=\dfrac{y-y_N}{b}=\dfrac{z-z_N}{c}$ thì hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d là điểm H thuộc d sao cho $\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_d}=0$

3. Hình chiếu vuông góc của một đường thẳng đến một mặt phẳng

- Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là giao điểm của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (P)
- (α) là mặt phẳng đi chứa d và vuông góc với (P)
- (α) nhận $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_P}$ là cặp vecto chỉ phương
- (α) chứa mọi điểm nằm trong đường thẳng d

4. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh lần 1 năm 2017]

Cho mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+z+6=0$ và điểm $A(2;-1;0)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) có tọa độ

A. $(2;-2;3)$ **B.** $(1;1;-2)$ **C.** $(1;0;3)$ **D.** $(-1;1;-1)$

GIẢI

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $(\alpha)\Rightarrow$ Đường thẳng AH song song với vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}(3;-2;1)$ của $(\alpha)\Rightarrow(AH):\begin{cases}x=2+3t\\y=-1-2t\\z=t\end{cases}$

  $\Rightarrow$ Tọa độ điểm $A(2+3t;-1-2t;1+t)$

  (Phần này ta dễ dàng nhẩm được mà không cần nháp)
- Để tìm t ta chỉ cần thiết lập điều kiện A thuọc (α) là xong

3 (2 + 3 ALPHA)) − 2 (− 1 − 2 ALPHA)) + ALPHA) + 6 SHIFT CALC 1 =

```
3(2+3X)-2(-1-2X▸
X=             -1
L-R=            0
```

$\Rightarrow t=-1\Rightarrow H\left(-1;1;-1\right)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm $M\left(3;3;3\right)$ qua mặt phẳng $\left(P\right):x+y+z-1=0$

A. $M'\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ **B.** $M'\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

C. $M'\left(-\frac{7}{3};-\frac{7}{3};-\frac{7}{3}\right)$ **D.** $M'\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$

GIẢI

- Tương tự ví dụ 1 ta nhẩm được tọa độ hình chiếu vuông góc H của M lên $\left(P\right)$ là $M\left(3+t;3+t;3+t\right)$
- Tính t bằng Casio.

3 + ALPHA) + 3 + ALPHA) + 3 + ALPHA) − 1 SHIFT CALC 1 =

```
3+X+3+X+3+X-1
X=  -2.666666667
L-R=            0
```

Ta thu được $t=-\frac{8}{3}\Rightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

- Ví A' đối xứng với M qua H nên H là trung điểm của MM'. Theo quy tắc trung điểm ta suy ra được $M'\left(-\frac{7}{3};-\frac{7}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

VD3-[Thi thử THPT Quảng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$ và điểm $M\left(1;2;-3\right)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng d là :

A. $H\left(1;2;-1\right)$ **B.** $H\left(1;-2;-1\right)$ **C.** $H\left(-1;-2;-1\right)$ **D.** $H\left(1;2;1\right)$

GIẢI

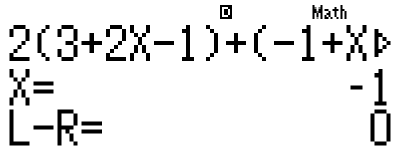
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d.

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=3+t\\y=-1+t\\z=1+2t\end{cases}\Rightarrow$ Tọa độ $H\left(3+2t;-1+t;1+2t\right)$

$MH\perp d\Rightarrow\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_d}=0$ với $\overrightarrow{u_d}\left(2;1;2\right)$

- Sử dụng máy tính Casio bấm :

2 (3 + 2 ALPHA) − 1) + (− 1 + ALPHA) − 2) + 2 (1 + 2 ALPHA) − − 3) SHIFT CALC 1 =



Khi đó $t=-1 \Rightarrow H(1;-2;-1)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$ và điểm $A(2;-1;1)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên d. Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm I và đi qua A

A. $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=20$

B. $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=5$

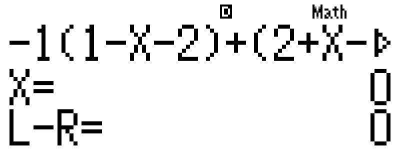
C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=14$

GIẢI

- Điểm I có tọa độ $I(1-t;2+t;-1+t)$
- Thiết lập điều kiện vuông góc $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_d}=0$

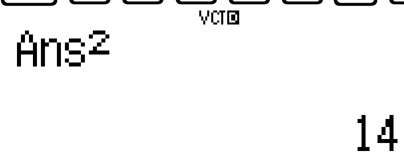
[−] [1] [(] [1] [−] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [+] [(] [2] [+] [ALPHA] [)] [−] [−] [1] [)] [+] [2] [(] [−] [1] [+] [2] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



$\Rightarrow t=0 \Rightarrow I(1;2;-1)$

- Với $I(1;2;-1)$ và $A(2;-1;1)$ ta có : $R^2=IA^2=\left|\overrightarrow{IA}\right|^2=14$

[MODE] [8] [1] [1] [2] [−] [1] [=] [−] [1] [−] [2] [=] [1] [−] [−] [1] [=] [ON] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [=] [=] [x^2] [=]



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{x-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy) là :

A. $\begin{cases}x=0\\y=-1-t\\z=0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$

GIẢI

- Ta hiểu : Hình chiếu vuông góc d' của d lên mặt phẳng (Oxy) là giao tuyến của mặt phẳng (α) chứa d vuông góc với (Oxy) và mặt phẳng (Oxy)
- Mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với (Oxy) nên nhận vecto chỉ phương $\vec{u}(2;1;1)$ của đường thẳng d và vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{Oxy}}(0;0;1)$ là cặp vecto chỉ phương

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_{Oxy}}\right] = (1;-2;0)$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



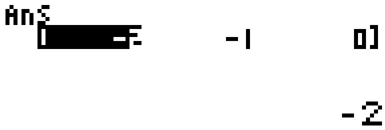
Hơn nữa (α) đi qua điểm có tọa độ $(1;-1;2)$ nên có phương trình :

$(\alpha):1(x-1)-2(y+1)+0(z-2)=0 \Leftrightarrow (\alpha):x-2y-3=0$

- Phương trình của d' có dạng $\begin{cases}(\alpha):x-2y-3=0\\(Oxy):z=0\end{cases}$. Chuyển sang dạng tham số ta có :

$\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{Oxy}};\overrightarrow{n_\alpha}\right] = (-2;-1;0)$

MODE 8 1 1 1 = − 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



Có 3 đáp án thỏa mãn vecto chỉ phương có tọa độ $(-2;-1;0)$ là **B**, **C**, **D**

Tuy nhiên chỉ có đáp án **B** chứa điểm $M(1;-1;0)$ và điểm này cũng thuộc d'

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

<u>VD6</u>-[Câu 61 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d:\begin{cases}x=\frac{7}{2}+3t\\y=-2t\\z=-2t\end{cases}$ trên

$(\alpha):x+2y-2z-2=0$

A. $\frac{x-5}{-4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{2}=\frac{z}{1}$ **B.** $\frac{x+5}{-4}=\frac{y-\frac{3}{2}}{2}=\frac{z}{1}$

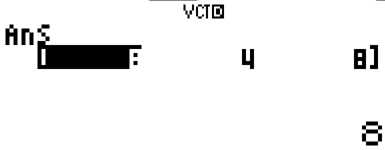
C. $2\frac{x-5}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{2}=\frac{z}{1}$ **D.** $\frac{x+5}{4}=\frac{y-\frac{3}{2}}{2}=\frac{z}{1}$

GIẢI

- Lập phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với (α)

$\overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_\alpha}\right] = (8;4;8)$

MODE 8 1 1 3 = − 2 = − 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = − 2 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



(β) đi qua điểm $\left(\frac{7}{2};0;0\right)$ nên có phương trình $8\left(x-\frac{7}{2}\right)+8y+8z=0 \Leftrightarrow 2x+2y+2z-7=0$

- Ta có $d':\begin{cases}2x+2y+2z-7=0\\x+2y-2z-2=0\end{cases}$

Tính $\overrightarrow{n_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-8;6;2)\Rightarrow \vec{n}(-4;3;2)$ cũng là vecto chỉ phương của d'

Đường thẳng d' lại đi qua điểm $\left(5;-\frac{3}{2};0\right)$ nên có phương trình : $\frac{x-5}{-4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{2}=\frac{z}{1}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]

Hình chiếu vuông góc của $A(-2;4;3)$ lên mặt phẳng $(P):2x-3y+6z+19=0$ có tọa độ là :

A. $(1;-1;2)$ **B**. $\left(-\frac{20}{7};\frac{37}{7};\frac{3}{7}\right)$ **C**. $\left(-\frac{2}{5};\frac{37}{5};\frac{31}{5}\right)$ **D**. Kết quả khác

Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho mặt phẳng $(P):x+y-z-4=0$ và điểm $M(1;-2;-2)$ .Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P)

A. $N(3;4;8)$ **B**. $N(3;0;-4)$ **C**. $N(3;0;8)$ **D**. $N(3;4;-4)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho $A(5;1;3),B(-5;1;-1),C(1;-3;0),D(3;-6;2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là :

A. $(-1;7;5)$ **B**. $(1;7;5)$ **C**. $(1;-7;-5)$ **D**. $(1;-7;5)$

Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P):-x+y+2z+3=0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-3}$ **B**. $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}$ **D**. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-3}$

Bài 5-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho ba điểm $A(-1;3;2),B(4;0;-3)$, $C(5;-1;4)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên đường thẳng BC

A. $\left(\frac{77}{17};-\frac{9}{17};\frac{12}{17}\right)$ **B**. $\left(\frac{77}{17};\frac{9}{17};\frac{12}{17}\right)$ **C**. $\left(\frac{77}{17};-\frac{9}{17};-\frac{12}{17}\right)$ **D**. $\left(-\frac{77}{17};-\frac{9}{17};-\frac{12}{17}\right)$

Bài 6-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M(-3;1;-1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):4x-3y-13=0$ và $(\beta):y-2z+5=0$

A. $(-2;-5;-3)$ **B**. $(2;-5;3)$ **C**. $(5;-7;-3)$ **D**. $(5;-7;3)$

Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là :

A. $\begin{cases}x=0\\y=-1-t\\z=0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]

Hình chiếu vuông góc của $A(-2;4;3)$ lên mặt phẳng $(P):2x-3y+6z+19=0$ có tọa độ là :

A. $(1;-1;2)$ **B.** $\left(-\dfrac{20}{7};\dfrac{37}{7};\dfrac{3}{7}\right)$ **C.** $\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{37}{5};\dfrac{31}{5}\right)$ **D.** Kết quả khác

GIẢI

- Đường thẳng Δ chứa A và vuông góc với (P) có phương trình : $\begin{cases}x=-2+2t\\y=4-3t\\z=3+6t\end{cases}$

Điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) nên có tọa độ $H(-2+2t;4-3t;3+6t)$

- Tính t bằng Casio
- [2] [(] [−] [2] [+] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [3] [(] [4] [−] [3] [ALPHA] [)] [)] [+] [6] [(] [3] [+] [6] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [9] [SHIFT] [CALC] [1] [=]

```
2(-2+2X)-3(4-3X▸
X=   -0.428571428
L-R=            0
```

Chuyển t về dạng phân thức

[SHIFT] [RCL] [(−)] [=]

```
Ans→A
                -3/7
```

Vậy $t=-\dfrac{3}{7}\Rightarrow H\left(-\dfrac{20}{7};\dfrac{37}{7};\dfrac{3}{7}\right)$

Vậy đáp số chính xác là **B**

Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

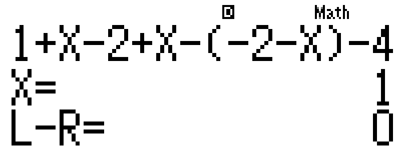
Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho mặt phẳng $(P):x+y-z-4=0$ và điểm $M(1;-2;-2)$ .Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P)

A. $N(3;4;8)$ **B.** $N(3;0;-4)$ **C.** $N(3;0;8)$ **D.** $N(3;4;-4)$

GIẢI

- Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=-2-t\end{cases}\Rightarrow$ Tọa độ hình chiếu $H(1+t;-2+t;-2-t)$
- Tìm t bằng Casio ta được $t=1$

[1] [+] [ALPHA] [)] [−] [2] [+] [ALPHA] [)] [−] [(] [−] [2] [−] [ALPHA] [)] [)] [−] [4] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



Với $t=1 \Rightarrow H(2;-1;-3) \Rightarrow N(3;0;-4)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

<u>Bài 3</u>-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho $A(5;1;3), B(-5;1;-1), C(1;-3;0), D(3;-6;2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là :

A. $(-1;7;5)$ **B.** $(1;7;5)$ **C.** $(1;-7;-5)$ **D.** $(1;-7;5)$

GIẢI

- Tính vecto chỉ phương của (BCD) : $\vec{u} = \left[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}\right] = (-5;-10;-10)$

MODE 8 1 1 1 − − 5 = − 3 − 1 = 0 − − 1 = MODE 8 2 1 3 − − 5 = − 6 − 1 = 2 − − 1 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

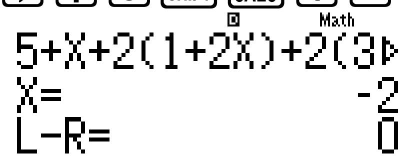


(BCD) qua $B(-5;1;-1) \Rightarrow (BCD): -5(x+5) - 10(y-1) - 10(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 2z + 5 = 0$

- Gọi H là hình chiếu của A lên $(BCD) \Rightarrow H(5+t;1+2t;3+2t)$. Tính t

MODE 1 5 + ALPHA) + 2 (1 + 2 ALPHA)) + 2 (3 + 2 ALPHA)) + 5 SHIFT CALC 1 =



$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(3;-3;-1) \Rightarrow A'(1;-7;-5)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

<u>Bài 4</u>-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): -x + y + 2z + 3 = 0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$ **B.** $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ **D.** $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-3}$

GIẢI

- Lập mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_P}\right] = (1;-7;4)$

MODE 8 1 1 2 = 2 = 3 = MODE 8 2 1 − 1 = 1 = 2 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

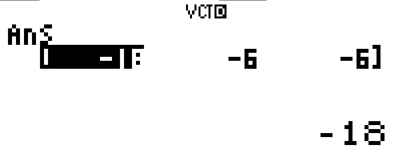


$(\alpha):(x+1)-7y+4(z+2)=0 \Leftrightarrow x-7y+4z+9=0$

- Đường thẳng d có phương trình tổng quát $\begin{cases} x-7y+4z+9=0 \\ -x+y+2z+3=0 \end{cases}$. Để so sánh kết quả ta phải chuyển phương trình đường thẳng d về dạng chính tắc

Ta có : $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_P}\right]=(-18;-6;-6) \Rightarrow \vec{u}(3;1;1)$ cũng là vecto chỉ phương của d

MODE 8 1 1 1 = − 7 = 4 = MODE 8 2 1 − 1 = 1 = 2 = ON
SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



Hơn nữa điểm $M(2;1;-1)$ cũng thuộc $d \Rightarrow$ Phương trình chính tắc $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

<u>Bài 5</u>-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho ba điểm $A(-1;3;2), B(4;0;-3)$, $C(5;-1;4)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên đường thẳng BC

A. $\left(\dfrac{77}{17};-\dfrac{9}{17};\dfrac{12}{17}\right)$ **B.** $\left(\dfrac{77}{17};\dfrac{9}{17};\dfrac{12}{17}\right)$ **C.** $\left(\dfrac{77}{17};-\dfrac{9}{17};-\dfrac{12}{17}\right)$ **D.** $\left(-\dfrac{77}{17};-\dfrac{9}{17};-\dfrac{12}{17}\right)$

GIẢI

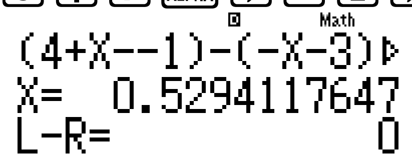
- Đường thẳng BC nhân vecto $\overrightarrow{BC}(1;-1;7)$ là vecto chỉ phương và đi qua điểm $B(4;0;-3)$

$\Rightarrow BC:\begin{cases} x=4+t \\ y=-t \\ z=-3+7t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $BC \Rightarrow H(4+t;-t;-3+7t)$

- Mặt khác $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$.

MODE 1 (4 + ALPHA) − − 1) − (− ALPHA) − 3) + 7 (−
3 + 7 ALPHA) − 2) SHIFT CALC 1 =



Chuyển t về dạng phân số

SHIFT RCL (−)



$\Rightarrow t=\dfrac{9}{17} \Rightarrow H\left(\dfrac{77}{17};-\dfrac{9}{17};\dfrac{12}{17}\right)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

<u>Bài 6</u>-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

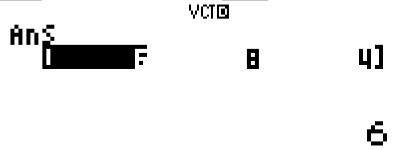
Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M(-3;1;-1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):4x-3y-13=0$ và $(\beta):y-2z+5=0$

A. $(-2;-5;-3)$ **B.** $(2;-5;3)$ **C.** $(5;-7;-3)$ **D.** $(5;-7;3)$

GIẢI

- d là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha);(\beta)$ nên có phương trình tổng quát : $\begin{cases}4x-3y-13=0\\ y-2z+5=0\end{cases}$
- Vecto chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_\beta};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(6;8;4)\Rightarrow$ nhận $\vec{u}(3;4;2)$ là vecto chỉ phương

MODE 8 1 1 4 = − 3 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 1 = − 2 = ON
SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

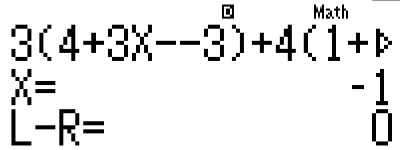


Đường thẳng d có vecto đi qua điểm $N(4;1;3)$ nên có phương trình tham số $\begin{cases}x=4+3t\\ y=1+4t\\ z=3+2t\end{cases}$

- Điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d nên có tọa độ $M(4+3t;1+4t;3+2t)$

Mặt khác $\overrightarrow{MH}\perp d\Rightarrow\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0$

MODE 1 3 (4 + 3 ALPHA) − − 3) + 4 (1 + 4 ALPHA) − 1
) + 2 (3 + 2 ALPHA) − − 1) SHIFT CALC 1 =



$\Rightarrow t=-1\Rightarrow H(1;-3;1)$

M' đối xứng M qua d vậy H là trung điểm $MM'\Rightarrow M'(5;-7;3)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

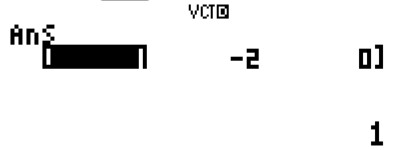
Cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa đọ (Oxy) là :

A. $\begin{cases}x=0\\ y=-1-t\\ z=0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+t\\ z=0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-1+t\\ z=0\end{cases}$

GIẢI

- Dựng mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với $(Oxy)\Rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_{Oxy}}\right]=(1;-2;0)$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON SHIFT 5
3 × SHIFT 5 4 =



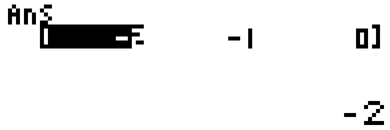
Mặt phẳng (α) chứa điểm $N(1;-1;2)$ nên có phương trình là :

$(\alpha):(x-1)-2(y+1)+0(z-2)=0\Leftrightarrow x-2y-3=0$

- Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng $(Oxy)\Rightarrow d'$ là giao tuyến của (α) và $(Oxy)\Rightarrow d':\begin{cases}x-2y-3=0\\ z=0\end{cases}$

Tính $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_{Oxy}}\right] = \left(-2;-1;0\right) \Rightarrow$ nhận $\vec{u}\left(2;1;0\right)$ là vecto chỉ phương

MODE 8 1 1 1 = − 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON SHIFT
5 3 × SHIFT 5 4 =



Lại có d' qua điểm có tọa độ $\left(1;-1;0\right) \Rightarrow d':\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 27. TÍNH NHANH THỂ TÍCH CHÓP, DIỆN TÍCH TAM GIÁC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Ứng dụng tích có hướng tính diện tích tam giác

- Cho tam giác ABC có diện tích tam giác ABC tính theo công thức $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của tam giác ABC : $AH=\frac{2.S_{ABC}}{BC}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

2. Ứng dụng tích có hướng tính thể tích hình chóp

- Thể tích hình chóp $ABCD$ được tính theo công thức $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của hình chóp $ABCD$: $AH=\frac{3.V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]\right|}$

3. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 41 đề minh họa vào ĐHQG HNnăm 2016]

Cho 4 điểm $A(1;0;1)$, $B(2;2;2)$, $C(5;2;1)$, $(4;3;-2)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

A. 6 **B.** 12 **C.** 4 **D.** 2

GIẢI

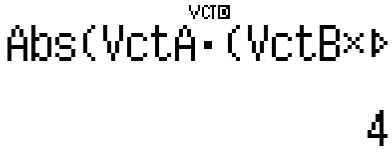
➢ Nhập thông số ba vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 2 − 1 = 2 − 0 = 2 − 1 = MODE 8 2 1 5 − 1 = 2 − 0 = 1 − 1 = MODE 8 3 1 4 − 1 = 3 − 0 = − 2 − 1 =



➢ Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|=4$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5)) ÷ 6 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

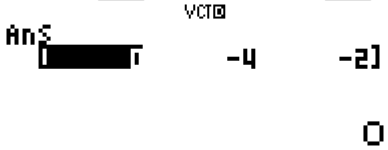
Cho $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Điểm D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của D là :

A. $(0;-7;0)$ **B.** $\left[\begin{array}{l}(0;-7;0)\\(0;8;0)\end{array}\right.$ **C.** $(0;8;0)$ **D.** $\left[\begin{array}{l}(0;7;0)\\(0;-8;0)\end{array}\right.$

GIẢI

- Ta có : $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=5\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\pm30$
- Tính $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]$ bằng Casio ta được $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;-4;-2)$

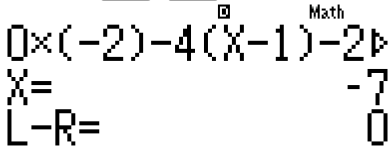
  [MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [−] [1] [=] [2] [=] [MODE] [8] [2] [1] [0] [=] [−] [2] [=] [4] [=] [ON] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [=]



- Điểm D nằm trên Oy nên có tọa độ $D(0;y;0)\Rightarrow\overrightarrow{AD}(-2;y-1;1)$

  Nếu $\overrightarrow{AD}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=30$

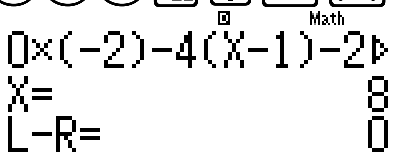
  [MODE] [1] [0] [×] [(] [−] [2] [)] [−] [4] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [−] [2] [×] [1] [−] [3] [0] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



  Ta thu được $y=-7\Rightarrow D(0;-7;0)$

  Nếu $\overrightarrow{AD}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=-30$

  [◀] [◀] [◀] [DEL] [+] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



  Ta thu được $y=8\Rightarrow D(0;8;0)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD3-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;0)$, $B(3;-1;1)$, $C(1;1;1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC

A. $S=\sqrt{3}$ **B.** $S=\sqrt{2}$ **C.** $S=\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}S=1$

GIẢI

- Nhập 2 vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ vào máy tính Casio

  [MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [−] [3] [=] [1] [=] [MODE] [8] [2] [1] [0] [=] [−] [1] [=] [1] [=]

VCT
A [2 -3] B [0 -1]

1 1 .

➢ Diện tích tam giác ABC được tính theo công thức: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=1.732...=\sqrt{3}$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ 2 =

VCT
Abs(VctA×VctB)÷2

1.732050808

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD4-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(4;1;1)$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB là :

A. $\frac{1}{\sqrt{19}}$ **B.** $\sqrt{\frac{86}{19}}$ **C.** $\sqrt{\frac{19}{86}}$ **D.** $\sqrt{\frac{54}{11}}$

GIẢI

➢ Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]\right|$

MODE 8 1 1 1 = 2 = 0 = MODE 8 2 1 4 = 1 = 1 = ON
SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ 2 =

VCT
Abs(VctA×VctB)÷2

3.674234614

Vì giá trị diện tích này lẻ nên ta lưu vào biến A cho dễ nhìn

SHIFT RCL (–)

VCT
Ans→A

3.674234614

➢ Gọi h là chiều cao hạ từ O đến đáy AB ta có công thức $S_{OAB}=\frac{1}{2}h.AB\Leftrightarrow h=\frac{2S}{AB}$

➢ Tính độ dài cạnh $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|$

MODE 8 1 1 3 = – 1 = 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3) =

VCT
Abs(VctA)

3.31662479

Giá trị này lẻ ta lại lưu vào biến B

SHIFT RCL °'''

VCT
Ans→B

3.31662479

$\Rightarrow h=\frac{2A}{B}=2.2156...=$

2 ALPHA (–) ÷ ALPHA °''' =

VCT
2A÷B

2.215646838

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$. Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là :

A. 11 **B.** $\frac{45}{7}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

GIẢI

- Ta tính được thể tích cả tứ diện $ABCD$ theo công thức $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{154}{3}$

MODE 8 1 1 2 = − 2 = − 3 = MODE 8 2 1 4 = 0 = 6 = MODE 8 3 1 − 7 = − 7 = 7 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

VCT
Abs(VctA•(VctB×▸

51.33333333 .

- Gọi h là khoảng cách từ $D\Rightarrow V=\frac{1}{3}h.S_{ABC}\Rightarrow h=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{154}{S_{ABC}}$:
- Tính S_{ABC} theo công thức $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=14$

SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ 2 =

VCT
Abs(VctA×VctB)÷2

14

Khi đó $h=\frac{154}{14}=11$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD6-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Điểm M thuộc d để tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất có tọa độ là :

A. $M(-1;1;0)$ **B.** $M(3;-1;4)$ **C.** $M(-3;2;-2)$ **D.** $M(1;0;2)$

GIẢI

- Diện tích tam giác ABM được tính theo công thức $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right]\right|\Leftrightarrow 2S=\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right]\right|$
- Với $M(-1;1;0)$ ta có $2S=29.3938...$

MODE 8 1 1 2 = − 2 = 6 = MODE 8 2 1 − 2 = − 4 = 0 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) =

VCT
Abs(VctA×VctB)

29.39387691

- Với $M(3;-1;4)$ ta có $2S=29.3938...$

MODE 8 2 1 2 = − 6 = 4 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) =

VCT
Abs(VctA×VctB)

29.39387691

- Với $M(-3;2;-2)$ ta có $2S = 32.8633...$

MODE 8 2 1 − 4 = − 3 = − 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) =

VCT
Abs(VctA×VctB)

32.86335345

- Với $M(1;0;2)$ ta có $2S = 28.1424...$

MODE 8 2 1 0 = − 5 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT hyp 4 DEL DEL SHIFT 5 4) =

VCT
Abs(VctA×VctB)

28.14249456

So sánh 4 đáp số $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 1 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng :

A. 30 **B**. 40 **C**. 50 **D**. 60

Bài 2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho bốn điểm $A(a;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$ và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30. Giá trị của a là :

A. 1 **B**. 2 **C**. 2 hoặc 32 **D**. 32

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;4)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{OABC} = 36$

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$ **B**. $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$ **C**. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{12}=1$ **D**. Đáp án khác

Bài 4-[Thi thử THPT Nho Quan – Ninh Bình lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;1;0)$, $B(2;2;2)$, $C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

A. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};-\frac{11}{2}\right)$ **B**. $\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$ **D**. $\left(\frac{3}{5};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

Bài 5-[Câu 4 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là :

A. $\sqrt{11}$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ **C.** 1 **D.** 11

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 1 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

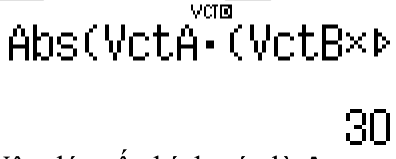
Cho $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng :

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

GIẢI

- Thể tích tứ diện $ABCD$ được tính theo công thức $V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|=30$

MODE 8 1 1 − 5 = 0 = − 1 0 = MODE 8 2 1 3 = 0 = − 6 = MODE 8 3 1 − 1 = 3 = − 5 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5)) ÷ 6 =



Vậy đáp số chính xác là **A**

Bài 2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

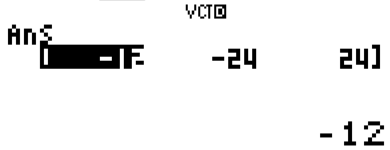
Cho bốn điểm $A(a;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$ và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30. Giá trị của a là :

A. 1 **B.** 2 **C.** 2 hoặc 32 **D.** 32

GIẢI

- Vì điểm A chứa tham số nên ta ưu tiên vecto $\overrightarrow{BA}$ tính sau cùng. Công thức tính thể tích $ABCD$ ta sắp xếp như sau : $V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]\right|$
- Tính $\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]=(-12;-24;24)$

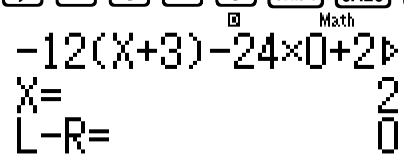
MODE 8 1 1 8 = 0 = 4 = MODE 8 2 1 4 = 3 = 5 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =



- Ta có $V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]\right|=30\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]=\pm180$

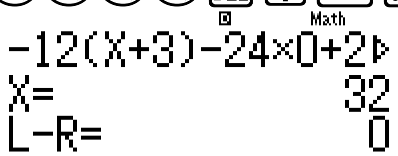
Với $\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]=180\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]-180=0\Rightarrow a=2$

MODE 1 − 1 2 (ALPHA) + 3) − 2 4 × 0 + 2 4 (6 + 4) − 1 8 0 SHIFT CALC 1 =



Với $\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]=-180\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]+180=0\Rightarrow a=32$

◀ ◀ ◀ ◀ DEL + SHIFT CALC 1 =



$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;4)$ và cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho $V_{OABC}=36$

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$ **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$ **C.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{12}=1$ **D.** Đáp án khác

GIẢI

- Trong các đáp án chỉ có mặt phẳng ở đáp án A đi qua điểm $M(1;2;4)$ cho nên ta chỉ đi kiểm tra tính đúng sai của đáp án A
- Theo tính chất của phương trình đoạn chắn thì mặt phẳng $(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$ cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại 3 điểm $A(3;0;0),B(0;6;0),C(0;0;12)$. Hơn nữa 4 điểm O,A,B,C lập thành một tứ diện vuông đỉnh O
- Theo tính chất của tứ diện vuông thì $V_{OABC}=\frac{1}{6}|OA||OB||OC|=\frac{1}{6}.3.6.12=36$ (đúng)

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

Bài 4-[Thi thử THPT Nho Quan – Ninh Bình lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;1;0)$, $B(2;2;2)$, $C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

A. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};-\frac{11}{2}\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{3}{5};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

GIẢI

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ $M(1+2t;-2-t;3+2t)$
- Thể tích tứ diện $MABC$ được tính theo công thức $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$

Tính $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-6;6)$

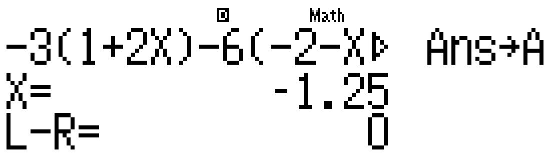
MODE 8 1 1 2 = 1 = 2 = MODE 8 2 1 − 2 = 2 = 1 = ON SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

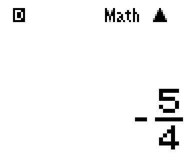


- Ta có $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=3\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\pm18$

Với $\overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=18\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]-18=0$

MODE 1 − 3 (1 + 2 ALPHA)) − 6 (− 2 − ALPHA) − 1) + 6 (3 + 2 ALPHA)) − 1 8 SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL (−)





Ta được $t=-\frac{5}{4}\Rightarrow M\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

Với $\overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=-18\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]+18=0$

Rõ ràng chỉ có đáp số **A** chứa điểm M trên $\Rightarrow$**A** là đáp số chính xác

Bài 5-[Câu 4 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là :

A. $\sqrt{11}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{11}}$ **C.** 1 **D.** 11

GIẢI

- Tính thể tích tứ diện $ABCD$ theo công thức $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|=0.5$

MODE 8 1 1 3 = 0 = 3 = MODE 8 2 1 1 = 1 = − 2 = MODE 8 3 1 4 = 1 = 0 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 × SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

```
Abs(VctA·(VctB×▸
                 0.5
```

- Gọi h là chiều cao cần tìm . Khi đó $V_{ABCD}=\frac{1}{3}h.S_{ABC}\Leftrightarrow h=\frac{3S}{S_{ABC}}$

Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) ÷ 2 = SHIFT RCL (−)

```
Abs(VctA×VctB)÷2      Ans→A

      4.974937186       4.974937186
```

Vậy $h=\frac{3V}{S_{ABC}}=0.3015...=\frac{1}{\sqrt{11}}$.$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

BÀI 28. TÍNH NHANH GÓC GIỮA VÉCTƠ, ĐƯỜNG VÀ MẶT.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Góc giữa hai vecto

- Cho hai vecto $\vec{u}(x;y;z)$ và $\vec{v}(x';y';z')$, góc giữa hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ được tính theo công thức :

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

- Góc giữa hai vectơ thuộc khoảng $\left[0^0;180^0\right]$

2. Góc giữa hai đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{u_{d'}}$. Góc α giữa hai đường thẳng d,d' được tính theo công thức : $\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_{d'}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_{d'}}\right|}$ (tích vô hướng chia tích độ dài)
- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $\left[0^0;90^0\right]$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có hai vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Góc α giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ được tính theo công thức : $\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}$
- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $\left[0^0;90^0\right]$

4. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

- Cho đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}$. Góc α giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q) được tính theo công thức $\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u};\vec{n}\right)\right|$
- Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng thuộc khoảng $\left[0^0;90^0\right]$

5. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

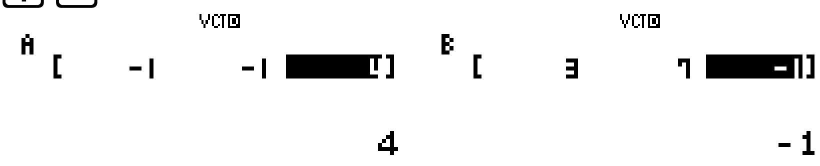
Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-2;1;0)$, $B(-3;0;4)$, $C(0;7;3)$. Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)$ bằng :

A. $\frac{14\sqrt{118}}{354}$ **B.** $-\frac{14}{3\sqrt{118}}$ **C.** $\frac{\sqrt{798}}{57}$ **D.** $-\frac{\sqrt{798}}{57}$

GIẢI

➢ Nhập hai vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 − 1 = − 1 = 4 = MODE 8 2 1 3 = 7 = − 1 =



➢ Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right|}=0.4296...=-\dfrac{14}{3\sqrt{118}}$

➢ ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

VctA·VctB÷(Abs(

-0.4296014884

⇒ Đáp số chính xác là **B**

VD2-[Câu 37 đề minh họa vào ĐHQG HNnăm 2016]

Góc giữa hai đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d':\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ là :

A. 45^0 **B.** 90^0 **C.** 60^0 **D.** 30^0

GIẢI

➢ Đề bài yêu cầu tính góc theo đơn vị độ nên ta chuyển máy tính về chế độ độ SHIFT MODE 3

Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;-1;2)$, đường thẳng d' có vecto chỉ phương $\vec{u}'(2;1;1)$

➢ Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d;d'$ thì $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u};\vec{u}'\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{u}'\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u}'\right|}$

MODE 8 1 1 1 = − 1 = 2 = MODE 8 2 1 2 = 1 = 1 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA·VctB)÷

0.5

➢ Ta có $\cos\alpha=0.5\Rightarrow\alpha=60^0$

Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|=4$

= SHIFT cos Ans) =

cos⁻¹(Ans)

60

⇒ Đáp số chính xác là **C**

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u}(1;\log_3 5;\log_m 2)$, $\vec{v}(3;\log_5 3;4)$ là góc nhọn

A. $1>m>\dfrac{1}{2}$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\0<m<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ **C.** $0<m<\dfrac{1}{2}$ **D.** $m>1$

GIẢI

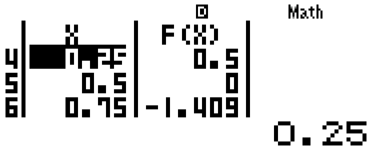
- Gọi góc giữa 2 vecto $\vec{u},\vec{v}$ là α thì $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

  Để góc α nhọn thì $\cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} < 0 \Leftrightarrow 1.3 + \log_3 5.\log_5 3 + 4.\log_m 2 < 0 \Leftrightarrow \log_m 2 + 1 < 0$ (1)

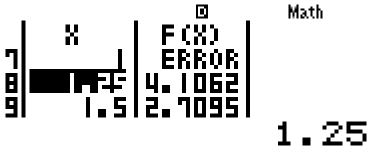
- Để giải bất phương trình (1) ta sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start -2 End 2 Step 0.5

  MODE 7 log□□ ALPHA) ▶ 2 ▶ + 1 = = − 0 . 5 = 1 . 5 = 0 . 2 5 =

  Ta thấy $f(0.25) = 0.5 > 0 \Rightarrow$ Đáp án **C** sai



  Ta thấy $f(1.25) = 4.1062 > 0 \Rightarrow$ Đáp số **B** và **D** sai



  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD4-[Câu 42a trang 125 Sách bài tập nâng cao hình học 12]

Tìm α để hai mặt phẳng $(P): x - \dfrac{1}{4}y - z + 5 = 0$ và $(Q): x\sin\alpha + y\cos\alpha + z\sin^3\alpha + 2 = 0$ vuông góc với nhau

A. 15^0 **B.** 75^0 **C.** 90^0 **D.** Cả **A, B, C** đều đúng

GIẢI

- Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}\left(1;-\dfrac{1}{4};-1\right)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(\sin\alpha;\cos\alpha;\sin^3\alpha)$

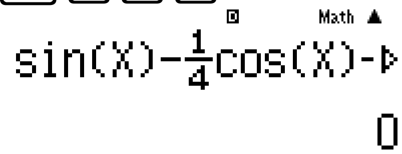
  Để hai mặt phẳng trên vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ góc giữa $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ bằng $90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$

  $\Leftrightarrow \sin\alpha - \dfrac{1}{4}\cos\alpha - \sin^3\alpha = 0$. Đặt $P = \sin\alpha - \dfrac{1}{4}\cos\alpha - \sin^3\alpha$

- Vì đề bài đã cho sẵn đáp án nên ta sử dụng phương pháp thử đáp án bằng chức năng CALC của máy tính Casio

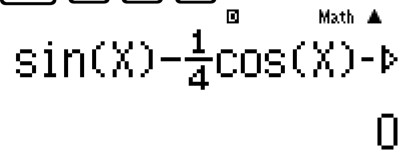
  Với $\alpha = 15^0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án **A** đúng

  sin ALPHA)) − ▭ 1 ▼ 4 ▶ cos ALPHA)) − sin ALPHA)) x■ 3 CALC 1 5 =



  Với $\alpha = 75^0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án **B** đúng

  CALC 7 5 =



  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (P) .Tìm số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x-y-6=0$

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

GIẢI

- Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên nhận $\overrightarrow{OH}(2;-1;-2)$ là vecto pháp tuyến

  $\Rightarrow (P): 2(x-2)-1(y+1)-2(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x-y-2z-9=0$

  Mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}(1;-1;0)$

- Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q) \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{OH}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}$

  MODE 8 1 1 2 = − 1 = − 2 = MODE 8 2 1 1 = − 1 = 0 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

  VCT
  Abs(VctA·VctB)÷▷

  0.7071067812

  Vậy $\cos\alpha = 0.7071... = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$

  = SHIFT cos Ans) =

  VCT
  cos⁻¹(Ans)

  45

  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD6-[Câu 47 trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Mặt phẳng (Q) nào sau đây đi qua hai điểm $A(3;0;0)$ và $B(0;0;1)$ đồng thời tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc là 60^0

A. $\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{26}y+3z-3=0 \\ x-5y+3z-3=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x+5y+3z-3=0 \\ x+\sqrt{26}y+3z-3=0 \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x-5y+3z-3=0 \\ x+5y+3z-3=0 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x+\sqrt{26}y+3z-3=0 \\ x-\sqrt{26}y+3z-3=0 \end{array}\right.$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

Để thực hiện cách này ta sẽ làm các phép thử. Ta thấy tất cả các mặt phẳng xuất hiện trong đáp án đều đi qua 2 điểm A, B . Vậy ta chỉ cần tính góc giữa mặt phẳng xuất hiện trong đáp án và mặt phẳng (Oxy) là xong.

- Với mặt phẳng $(Q): x-\sqrt{26}y+3z-3=0$ có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = \left(1;-\sqrt{26};3\right)$, mặt phẳng (Oxy) có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$

  Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng trên $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_Q};\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^0$

MODE 8 1 1 1 = − √■ 2 6) = 3 = MODE 8 2 1 0 = 0
= 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp
SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

VCT■
Abs(VctA·VctB)÷▸

0.5

$\Rightarrow$ Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng $(Q): x-\sqrt{26}y+3z-3=0$.

- Tiếp tục thử với mặt phẳng $x-5y+3z-3=0$ nếu thỏa thì đáp án **A** đúng nếu không thì đáp án **D** đúng

❖ **Cách tự luận**

- Gọi mặt phẳng (Q) có dạng $Ax+By+Cz+D=0$

(Q) qua $A \Rightarrow 3A+D=0$, (Q) qua $B \Rightarrow C+D=0$. Chọn $D=1 \Rightarrow C=-1; A=-\frac{1}{3}$

Khi đó $(Q): -\frac{1}{3}x+By-z+1=0$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}\left(-\frac{1}{3}; B; -1\right)$

- Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^0 \Rightarrow \cos 60^0 = \frac{\left|\overrightarrow{n_Q};\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{n_Q};\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{1}{3}.0+B.0-1.1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+B^2+1}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{B^2+\frac{10}{9}}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{B^2+\frac{10}{9}} = 2 \Leftrightarrow B^2+\frac{10}{9} = 4 \Leftrightarrow B^2 = \frac{26}{9} \Leftrightarrow B = \pm\frac{\sqrt{26}}{3}$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD7-[Câu 71 trang 134 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+5=0$

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

GIẢI

- Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}(2;1;1)$ và mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(1;2;-1)$

Gọi β là góc giữa giữa 2 vectơ $\vec{u}, \vec{n}$. Ta có $\left|\cos(\beta)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 1 = 2 = − 1 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3
) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

VCT■
Abs(VctA·VctB)÷▸

0.5

- Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P) \Rightarrow \sin\alpha = \left|\cos\beta\right| = 0.5$

$\Rightarrow \alpha = 30^0$

SHIFT sin Ans) =

VCT
$\sin^{-1}(Ans)$

30

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 21 trang 119 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD :

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 120^0

Bài 2-[Câu 8 trang 142 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho $\vec{u}(1;1;-2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ là 45^0

A. $\left[\begin{array}{l} m=2-\sqrt{6} \\ m=2+\sqrt{6} \end{array}\right.$ **B.** $m=2-\sqrt{6}$ **C.** $m=2+\sqrt{6}$ **D.** Không có m thỏa mãn

Bài 3-[Câu 14 trang 143 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai mặt phẳng $(P): m^2x-y+(m^2-2)z+2=0$ và $2x+m^2y-2z+1=0$ vuông góc với nhau :

A. $|m|=2$ **B.** $|m|=1$ **C.** $|m|=\sqrt{2}$ **D.** $|m|=\sqrt{3}$

Bài 4-[Câu 94 trang 140 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm là trung điểm $B'C'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AP và BC'

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 5-[Câu 47a trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x+y-\sqrt{5}z=0$ một góc 60^0

A. $\left[\begin{array}{l} x+3y=0 \\ x-3y=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x-3y=0 \\ -3x+y=0 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} -3x+y=0 \\ x+3y=0 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} -3x+y=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right.$

Bài 6-[Câu 19 trang 145 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $(P): 3x+4y+5z+8=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$, $(\beta): x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó :

A. $\varphi=30^0$ **B.** $\varphi=45^0$ **C.** $\varphi=60^0$ **D.** $\varphi=90^0$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 21trang 119Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD :

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 120^0

GIẢI

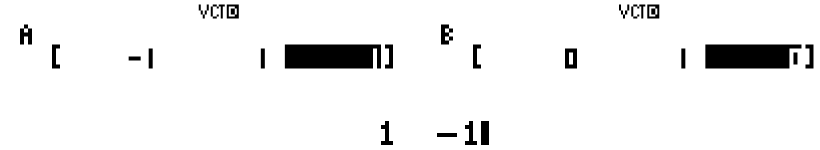
- Đường thẳng AB nhận vecto $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ là vecto chỉ phương , đường thẳng CD nhận $\overrightarrow{CD}(0;1;-1)$ là vecto chỉ phương

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD và được tính theo công thức :

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$$

- Nhập các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 − 1 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 1 = − 1 =



- Tính $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =



Vậy đáp số chính xác là **C**

<u>Bài 2</u>-[Câu 8 trang 142 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho $\vec{u}(1;1;-2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ là 45^0

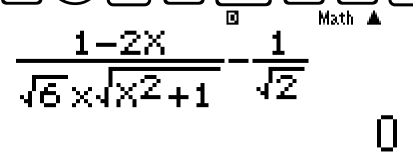
A. $\left[\begin{array}{l} m = 2-\sqrt{6} \\ m = 2+\sqrt{6}\end{array}\right.$ **B.** $m = 2-\sqrt{6}$ **C.** $m = 2+\sqrt{6}$ **D.** Không có m thỏa mãn

GIẢI

- Ta có $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2=1}}$
- Để góc giữa 2 vecto trên là 45^0 thì $\frac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2=1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2=1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$
- Để kiểm tra giá trị m thỏa mãn ta sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC

Với $m = 2-\sqrt{6}$

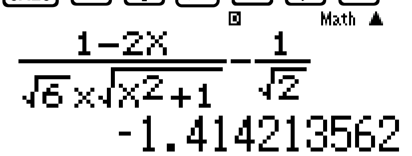
MODE 1 ▭ 1 − 2 ALPHA) ▼ √▭ 6 ▶ × √▭ ALPHA) x^2 + 1 ▶ ▶ − ▭ 1 ▼ √▭ 2 CALC 2 − √▭ 6) =



$\Rightarrow m = 2-\sqrt{6}$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là **A** hoặc **B**

Tiếp tục kiểm tra với $m = 2+\sqrt{6}$

CALC 2 + √▭ 6) =



$\Rightarrow 2+\sqrt{6}$ không thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

<u>Bài 3</u>-[Câu 14 trang 143 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai mặt phẳng $(P): m^2x - y + (m^2-2)z + 2 = 0$ và $2x + m^2y - 2z + 1 = 0$ vuông góc với nhau :

A. $|m| = 2$ **B.** $|m| = 1$ **C.** $|m| = \sqrt{2}$ **D.** $|m| = \sqrt{3}$

GIẢI

- Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(m^2;-1;m^2-2)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n'}(2;m^2;-2)$
- Để hai mặt phẳng trên vuông góc nhau thì $\vec{n} \perp \vec{n'} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'} = 0$
  $\Leftrightarrow m^2.2 - m^2 + (m^2-2).(-2) = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

<u>Bài 4</u>-[Câu 94 trang 140 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm là trung điểm $B'C'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AP và BC'

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

GIẢI

- Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là đỉnh A , tia Ox chứa AB , tia Oy chứa AD , tia Oz chứa AA' .
  Chọn $a=1$ khi đó : $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$, $B'(1;0;1)$, $C'(1;1;1)$

$\Rightarrow P\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{AP}\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{BC'}(0;1;1)$

- Góc giữa 2 đường thẳng AP, BC' là α thì $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AP};\overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AP}|.|\overrightarrow{BC'}|} = 0.7071... = \frac{\sqrt{2}}{2}$

MODE 8 1 1 1 = 0 • 5 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 1 = 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

VCT
Abs(VctA·VctB)÷▸

0.7071067812

$\Rightarrow$**D** là đáp số chính xác

<u>Bài 5</u>-[Câu 47a trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60^0

A. $\left[\begin{array}{l} x+3y=0 \\ x-3y=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x-3y=0 \\ -3x+y=0 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} -3x+y=0 \\ x+3y=0 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} -3x+y=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right.$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

➢ Với mặt phẳng $(P): x+3y=0$ có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1;3)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = (2;1;-\sqrt{5})$

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng trên $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^0$

MODE 8 1 1 1 = 3 = 0 = MODE 8 2 1 2 = 1 = − √■ 5) = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

VCT
Abs(VctA·VctB)÷▶

0.5

$\Rightarrow$ Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng $x+3y=0$.

➢ Tiếp tục thử với mặt phẳng $x-3y=0$ nếu thỏa thì đáp án **A** đúng nếu không thì đáp án **C** đúng

❖ **Cách tự luận**

➢ Gọi mặt phẳng (P) có dạng $Ax+By+Cz+D=0$. (P) chứa trục Oz thì (P) chứa 2 điểm thuộc trục Oz. Gọi hai điểm đó là $A(0;0;0)$ và $B(0;0;1)$

(P) qua $A\Rightarrow D=0$, (P) qua $B\Rightarrow C+D=0\Rightarrow C=D=0$ Chọn $A=1$

Khi đó $(P): x+By=0$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(1;B;0)$

➢ Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^0\Rightarrow\cos 60^0=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\left|\overrightarrow{n_Q};\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|}-\dfrac{1}{2}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|1.2+B.1+0.\left(-\sqrt{5}\right)\right|}{\sqrt{1^2+B^2+0^2}.\sqrt{2^2+1^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}}=\frac{1}{2}=\Leftrightarrow\frac{|B+2|}{\sqrt{10}\sqrt{B^2+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|B+2|=\sqrt{10}\sqrt{B^2+1}\Leftrightarrow 4\left(B^2+4B+4\right)=10\left(B^2+1\right)\Leftrightarrow 6B^2-16B-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=3\\B=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

Bài 6-[Câu 19 trang 145 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $(P): 3x+4y+5z+8=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$, $(\beta): x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó :

A. $\varphi=30^0$ **B.** $\varphi=45^0$ **C.** $\varphi=60^0$ **D.** $\varphi=90^0$

GIẢI

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ nên nhận d vuông góc với hai vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng này

$\Rightarrow$ Vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(4;4;4)$

MODE 8 1 1 1 = − 2 = 0 = MODE 8 2 1 1 = 0 = − 2 = ON
SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

VCT
Ans [redacted] 2 2]

4

- Gọi γ là góc giữa $\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}$ ta có $|\cos\gamma|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|}=0.8660...=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

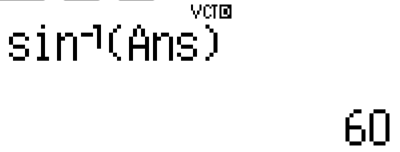
MODE 8 1 1 4 = 2 = 2 = MODE 8 2 1 3 = 4 = 5 = ON SHIFT hyp
SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT
5 4)) =

VCT
Abs(VctA·VctB)÷▶

0.8660254038

Ta có $\sin\varphi = \left|\cos\gamma\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0$

SHIFT sin Ans) =



. $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Chính xác là **B**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 29. TÍNH NHANH CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các khái niệm thường gặp

- Đơn vị ảo là một đại lượng được kí hiệu i và có tính chất $i^2=-1$
- Số phức là một biểu thức có dạng $a+bi$ trong đó a,b là các số thực . Trong đó a được gọi là phần thực và b được gọi là số ảo
- Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\bar{z}=a-bi$
- Số phức nghịch đảo của số phức $z=a+bi$ là số phức $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}$
- Môdul của số phức $z=a+bi$ được kí hiệu là $|z|$ và có độ lớn $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

2. Lệnh Caso

- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh tính Môđun của số phức là SHIFT HYP
- Lệnh tính số phức liên hợp $\bar{z}$ là SHIFT 2 2
- Lệnh tính Acgument của số phức là SHIFT 2 1

II) VÍ DỤ MINH HỌA

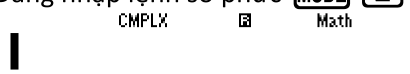
VD1-[Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$ .Tính Môđun của số phức z_1+z_2

A. $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$ **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$ **C.** $|z_1+z_2|=1$ **D.** $|z_1+z_2|=5$

GIẢI

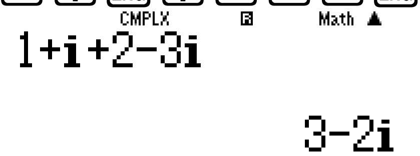
➢ Đăng nhập lệnh số phức MODE 2



(Khi nào máy tính hiển thị chữCMPLX thì bắt đầu tính toán số phức được)

➢ Để tính Môđun của số phức ta nhập biểu thức vào máy tính rồi sử dụng lệnh SHIFT HYP

1 + ENG + 2 − 3 ENG = SHIFT hyp Ans =





Vậy $|z_1+z_2|=\sqrt{13} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

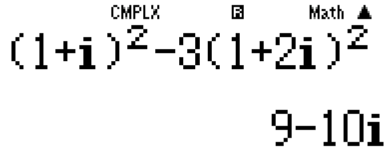
Số phức liên hợp với số phức $z=(1+i)^2-3(1+2i)^2$ là :

A. $-9-10i$ **B.** $9+10i$ **C.** $9-10i$ **D.** $-9+10i$

GIẢI

➢ Sử dụng máy tính Casio tính z

(1 + ENG) x^2 − 3 (1 + 2 ENG) x^2 =



$\Rightarrow z = 9 - 10i$

- Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$:

  Vậy $\bar{z} = 9 + 10i \Rightarrow$ Đáp án **B** là chính xác

VD3-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^2 có phần ảo là :

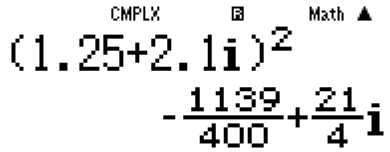
A. a^2b^2 **B.** $2a^2b^2$ **C.** $2ab$ **D.** ab

GIẢI

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành "cá biệt hóa" bài toán bằng cách chọn giá trị cho a, b (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).

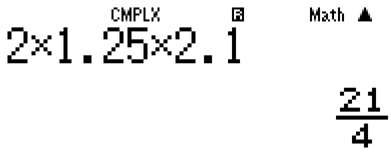
  Chọn $a = 1.25$ và $b = 2.1$ ta có $z = 1.25 + 2.1i$
- Sử dụng máy tính Casio tính z^2

  1 • 2 5 + 2 • 1 ENG) x^2 =



Vậy phần ảo là $\frac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là $\frac{21}{4}$ thì đáp án đó chính xác. Ta có :



Vậy $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

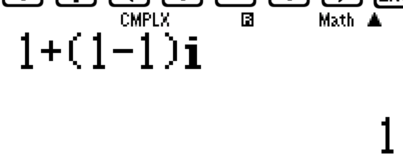
Để số phức $z = a + (a-1)i$ (a là số thực) có $|z| = 1$ thì :

A. $a = \frac{1}{2}$ **B.** $a = \frac{3}{2}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$ **D.** $a = \pm 1$

GIẢI

- Để xử lý bài này ta sử dụng phép thử, tuy nhiên ta chọn a sao cho khéo léo nhất để phép thử tìm đáp số nhanh nhất. Ta chọn $a = 1$ trước, nếu $a = 1$ đúng thì đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**, nếu $a = 1$ sai thì **C** và **D** đều sai.
- Với $a = 1$ Sử dụng máy tính Casio tính z

  1 + (1 − 1) ENG = SHIFT hyp Ans =

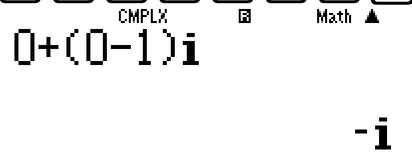


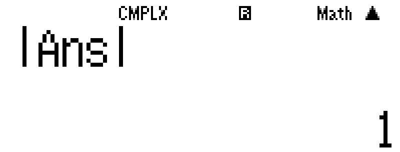


Vậy $|z|=1 \Rightarrow$ Đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**

- Thử với $a=0$ Sử dụng máy tính Casio tính z :

[0] [+] [(] [0] [−] [1] [)] [ENG] [=] [SHIFT] [hyp] [Ans] [=]





Vậy $|z|=1 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

<u>VD5</u>-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng – Đắc Nông lần 1 năm 2017]

Số phức $z=1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20}$ có giá trị bằng :

A. -2^{20} **B.** $-2^{10}+\left(2^{20}+1\right)i$ **C.** $2^{10}+\left(2^{10}+1\right)i$ **D.** $2^{10}+2^{10}i$

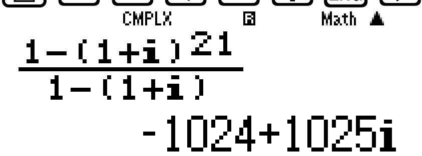
GIẢI

- Nếu ta nhập cả biểu thức $1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20}$ vào máy tính Casio thì vẫn được, nhưng mất nhiều thao tác tay. Để rút ngắn công đoạn này ta tiến hành rút gọn biểu thức
  Ta thấy các số hạng trong cùng biểu thức đều có chung một quy luật "số hạng sau bằng số hạng trước nhân với đại lượng $1+i$ " vậy đây là cấp số nhân với công bội $1+i$

  $$\Rightarrow 1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20}=U_1\frac{1-q^n}{1-1}=1.\frac{1-(1-i)^{21}}{1-(1-i)}$$

- Với $z=\dfrac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$ Sử dụng máy tính Casio tính z

[▭/▭] [1] [−] [(] [1] [+] [ENG] [)] [$x^{■}$] [2] [1] [▼] [1] [−] [(] [1] [+] [ENG] [)] [=]



Ta thấy $z=-1024+1025i=-2^{10}+\left(2^{10}+1\right)i$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là**B**

<u>VD6</u>-[Thi thử chuyên KHTN lần 1 năm 2017]

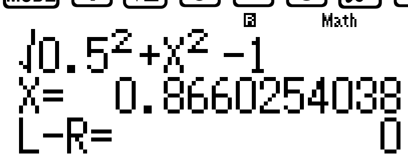
Nếu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ thì phần thực của $\dfrac{1}{1-z}$ bằng :

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** 2 **D.**Một giá trị khác

GIẢI

- Đặt số phức $z=a+bi$ thì Môđun của số phức z là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$
- Chọn $a=0.5 \Rightarrow \sqrt{0.5^2+b^2}=1$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm b

[MODE] [1] [√▭] [0] [•] [5] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [x^2] [▶] [−] [1] [SHIFT] [CALC] [0] [•] [5] [=]



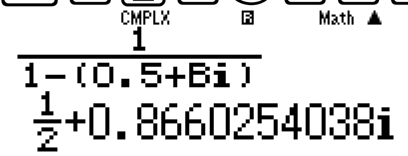
Lưu giá trị này vào b

SHIFT RCL °'''



- Trở lại chế độ CMPLX để tính giá trị $\frac{1}{1-z}$:

MODE 2 ▤ 1 ▼ 1 − (0 • 5 + ALPHA °''' ENG) =



Vậy phần thực của z là $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

VD7-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

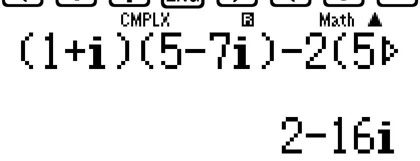
Tìm số phức z biết rằng : $(1+i)z-2\bar{z}=-5+11i$

A. $z=5-7i$ **B.** $z=2+3i$ **C.** $z=1+3i$ **D.** $z=2-4i$

GIẢI

- Với $z=5-7i$ thì số phức liên hợp $\bar{z}=5+7i$. Nếu đáp án A đúng thì phương trình : $(1+i)(5-7i)-2(5+7i)=-5+11i$ (1)
- Sử dụng máy tính Casio nhập vế trái của (1)

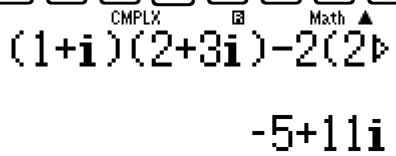
(1 + ENG) (5 − 7 ENG) − 2 (5 + 7 ENG) =



Vì $2-16i\neq-5+11i$ nên đáp án **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp án **B**

(1 + ENG) (2 + 3 ENG) − 2 (2 − 3 ENG) =



Dễ thấy vế trái (1) = vế phải (1) = $-5+11i$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD8-[Đề minh họa của bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=\frac{1}{2}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=-\frac{1}{2}$

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow(1+i)z+2\bar{z}-3-2i=0$ (1). Khi nhập số phức liên hợp ta nhấn lệnh

SHIFT 2 2



- Sử dụng máy tính Casio nhập vế trái của (1)

(1 + ENG) ALPHA) + 2 SHIFT 2 2 ALPHA)) − 3 − 2 ENG

CMPLX Math
◀?Conjg(X)−3−2i▮

➢ X là số phức nên có dạng $X = a + bi$ .Nhập $X = 1000 + 100i$ (có thể thay $a; b$ là số khác)

CALC 1 0 0 0 + 1 0 0 ENG =

CMPLX Math ▲
(1+i)X+2Conjg(X▶

2897+898i

Vậy vế trái của (1) bằng $2897 + 898i$. Ta có : $\begin{cases} 2897 = 3.1000 - 100 - 3 = 3a - b - 3 \\ 898 = 1000 - 100 - 2 = a - b - 2 \end{cases}$

Mặt khác đang muốn vế trái $= 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - b - 3 = 0 \\ a - b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{-3}{2}$

Vậy $a + b = -1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD9-Số phức $z = \dfrac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$ có một Acgument là :

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{8\pi}{3}$

GIẢI

➢ Thu gọn z về dạng tối giản $\Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i$

▭ 5 + 3 ENG √▭ 3 ▼ 1 − 2 ENG √▭ 3 =

CMPLX Math ▲
$\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

$-1+\sqrt{3}i$

➢ Tìm Acgument của z với lệnh SHIFT 2 1

SHIFT 2 1 − 1 + √▭ 3 ▶ ENG) =

CMPLX Math ▲
arg(−1+√3i)

$\frac{2}{3}\pi$

Vậy z có 1 Acgument là $\frac{2\pi}{3}$. Tuy nhiên khi so sánh kết quả ta lại không thấy có giá trị nào là $\frac{2\pi}{3}$.

Khi đó ta nhớ đến tính chất "Nếu góc α là một Acgument thì góc $\alpha + 2\pi$ cũng là một Acgument"

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D** vì $\frac{2\pi}{2} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $w = (z_1)^2 . z_2$

A. $w = 6 + 4i$ **B.** $w = 6 - 4i$ **C.** $w = -6 - 4i$ **D.** $w = -6 + 4i$

Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a + b$ **B.** $\frac{a}{a^2 + b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ **D.** $a - b$

Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]

Tìm môđun của số phức $z = 2 - \sqrt{3}i\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i\right)$ là :

A. $\frac{\sqrt{103}}{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{103}}{2}$ **C.** $\frac{5\sqrt{103}}{2}$ **D.** Đáp án khác

Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

A. -2^{11} **B.** $-2^{11}+2$ **C.** $-2^{11}-2$ **D.** 2^{11}

Bài 5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=(1+i)z-(2-i)\bar{z}$ là :

A. $-9i$ **B.** -9 **C.** -5 **D.** $-5i$

Bài 6-[Đề thi Đại học –Cao đẳng khối A năm 2009]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\bar{z}=-(1+3i)^2$. Tìm $P=2a+b$ **A.** 3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\bar{z}=-(1+3i)^2$. Tìm $P=2a+b$ **A.** 3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

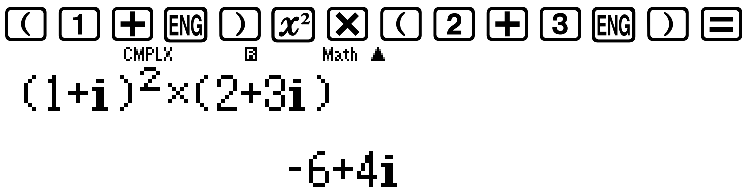
Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1=1+i, z_2=2+3i$. Tìm số phức $w=(z_1)^2.z_2$

A. $w=6+4i$ **B.** $w=6-4i$ **C.** $w=-6-4i$ **D.** $w=-6+4i$

GIẢI

- Sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 2 (CMPLX)



Vậy $w=-6+4i$ ta chọn **D** là đáp án chính xác

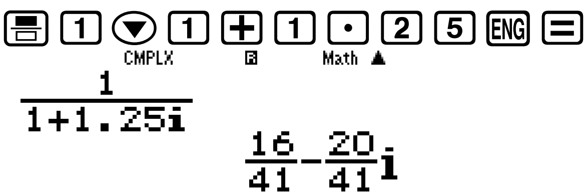
Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z=a+bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a+b$ **B.** $\frac{a}{a^2+b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2+b^2}$ **D.** $a-b$

GIẢI

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn $a=1; b=1.25$.
- Với $z^{-1}=\frac{1}{z}$ Sử dụng máy tính Casio



Ta thấy phần thực số phức z^{-1} là : $\frac{16}{41}$ đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn $b>a>0$ nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có $a+b=1+1.25=\frac{9}{4}\neq\frac{16}{41}$ vậy đáp số A cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]

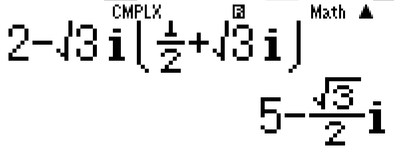
Tìm môđun của số phức $z=2-\sqrt{3}i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}i\right)$ là :

A. $\frac{\sqrt{103}}{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{103}}{2}$ **C.** $\frac{5\sqrt{103}}{2}$ **D.** Đáp án khác

GIẢI

- Tính số phức $z=2-\sqrt{3}i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}i\right)$

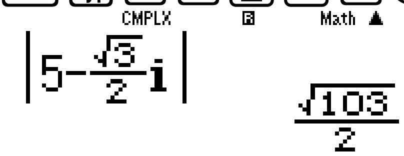




Vậy $z=5-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

- Dùng lệnh SHIFT HYP tính Môđun của số phức z ta được





Vậy $|z|=\frac{\sqrt{103}}{2}$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

<u>Bài 4</u>-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

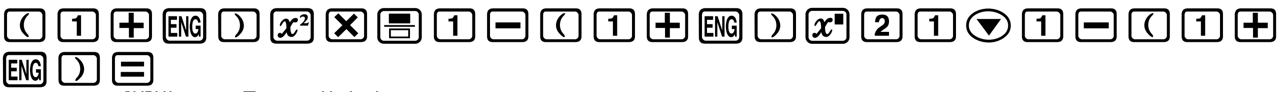
A. -2^{11} **B.** $-2^{11}+2$ **C.** $-2^{11}-2$ **D.** 2^{11}

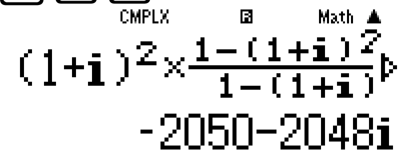
GIẢI

- Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1=(1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1+i$. Thu gọn z ta được

$$: z=U_1.\frac{1-q^n}{1-q}=(1+i)^2.\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$$

- Sử dụng máy tính Casio tính z





Vậy $z=-2050-2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2050=-2^{11}-2$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

<u>Bài 5</u>-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=(1+i)z-(2-i)\bar{z}$ là :

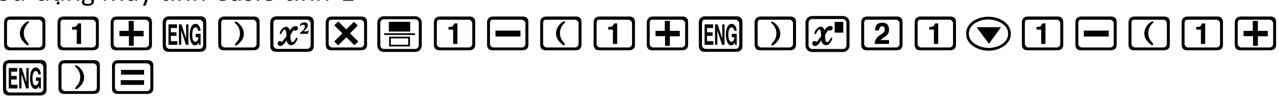
A. $-9i$ **B.** -9 **C.** -5 **D.** $-5i$

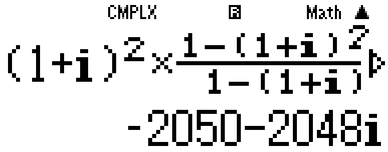
GIẢI

- Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1=(1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1+i$. Thu gọn z ta được

$$: z=U_1.\frac{1-q^n}{1-q}=(1+i)^2.\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$$

- Sử dụng máy tính Casio tính z





Vậy $z=-2050-2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2048=-2^{11}$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

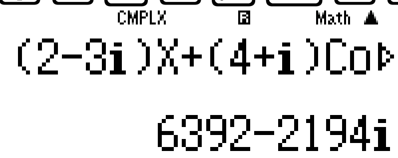
Bài 6-[Đề thi Đại học –Cao đẳng khối A năm 2009]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\bar{z}=-(1+3i)^2$ .Tìm $P=2a+b$ **A.** 3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z+(4+i)\bar{z}+(1+3i)^2=0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X=1000+100i$

(2 − 3 ENG) ALPHA) + (4 + ENG) SHIFT 2 2 ALPHA)) + (1 + 3 ENG) x^2 CALC 1 0 0 0 + 1 0 0 ENG =



Vậy vế trái $=6392-2194i$ với $\begin{cases}6392=6.1000+4.100-8=6a+4b-8\\2194=2.1000+2.100-6=2a+2b-6\end{cases}$

- Để vế trái $=0$ thì $\begin{cases}6a+4b-8=0\\2a+2b-6=0\end{cases} \Leftrightarrow a=-2; b=5$

Vậy $z=-2+5i \Rightarrow P=2a+b=1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

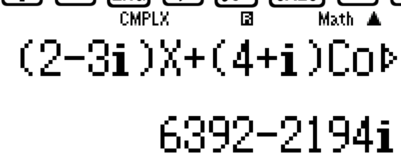
Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\bar{z}=-(1+3i)^2$. Tìm $P=2a+b$ **A.** 3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z+(4+i)\bar{z}+(1+3i)^2=0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X=1000+100i$

(2 − 3 ENG) ALPHA) + (4 + ENG) SHIFT 2 2 ALPHA)) + (1 + 3 ENG) x^2 CALC 1 0 0 0 + 1 0 0 ENG =



Vậy vế trái $=6392-2194i$ với $\begin{cases}6392=6.1000+4.100-8=6a+4b-8\\2194=2.1000+2.100-6=2a+2b-6\end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 30. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các khái niệm thường gặp

- Hệ trục thực ảo gồm có 2 trục vuông góc với nhau : Trục nằm ngang là trục thực, trục đứng dọc là trục ảo
- Số phực $z=a+bi$ khi biểu diễn trên hệ trục thực ảo là điểm $M\left(a;b\right)$
- Môđun của số phức $z=a+bi$ là độ lớn của vecto $\overrightarrow{OM}$

2. Lệnh Caso

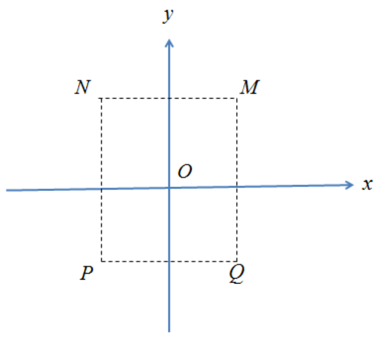
- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3
- Lệnh giải phương trình bậc ba MODE 5 4

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 31 Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $\left(1+i\right)z=3-i$. Hỏi điểm biểu diễn số phức z là điểm nào trong các điểm M,N,P,Q

A.điểm P **B.**điểm Q **C.**điểm M **D.**điểm N

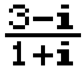


GIẢI

➢ Cô lập $z=\dfrac{3-1}{1+i}$

Sử dụng máy tính Casio trong môi trường CMPLX để tìm z







$\Rightarrow z=1-2i$ và điểm biểu diễn z trong hệ trục thực ảo có tọa độ $\left(1;-2\right)$. Điểm có thực dương và ảo âm sẽ nằm ở góc phần tư thứ IV

$\Rightarrow$ Điểm phải tìm là Q và đáp án chính xác là **B**

VD2-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Điểm biểu diễn số phức $z=7+bi$ với $b\in R$, nằm trên đường thẳng có phương trình là :

A. $x=7$ **B.** $y=x$ **C.** $y=x+7$ **D.** $y=7$

GIẢI

➢ Điểm biểu diễn số phức $z=7+bi$ là điểm M có tọa độ $M\left(7;b\right)$

Ta biết điểm M thuộc đường thẳng d nếu tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình đường thẳng d

➢ Thử đáp án A ta có $x=7\Leftrightarrow 1.x+0.y-7=0$. Thế tọa độ điểm M vào ta được : $1.7+0.b-7=0$ (đúng)

Vậy điểm M thuộc đường thẳng $x=7\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

VD3-[Thi thử Group Nhóm toán – Facebook lần 5 năm 2017]

Các điểm M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức

$z_1=\dfrac{4i}{i-1};\ z_2=\left(1-i\right)\left(1+2i\right);z_3=-1+2i$

A. Tam giác vuông **B.**Tam giác cân **C.**Tam giác vuông cân **D.**Tam giác đều

GIẢI

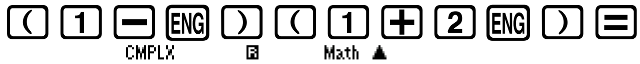
- Rút gọn z_1 bằng Casio

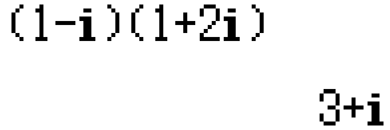




Ta được $z_1 = 2 - 2i$ vậy điểm $M(2;-2)$

- Rút gọn z_2 bằng Casio

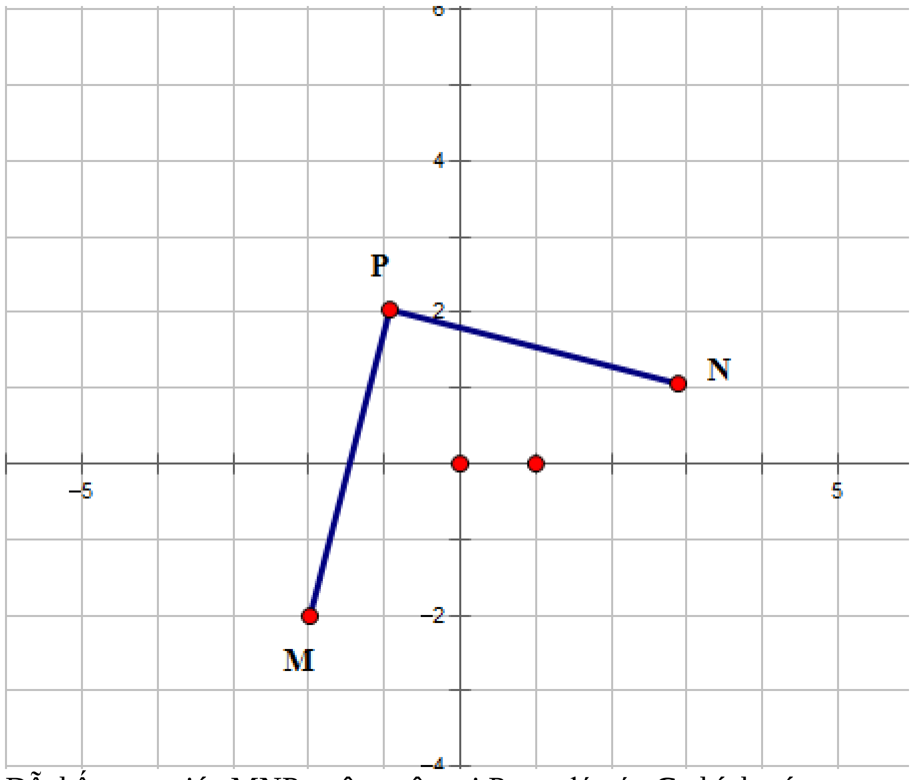




Ta được $z_2 = 3 + i$ vậy điểm $N(3;1)$

Tương tự $z_2 = -1 + 2i$ và điểm $P(-1;2)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M, N, P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại P $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học Tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy, gọi các điểm M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1 - \text{i}, z_2 = 3 + 2i$. Gọi G là trọng tâm tam giác OMN , với O là gốc tọa độ. Hỏi G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây.

A. $5 - i$ **B.** $4 + i$ **C.** $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$ **D.** $2 + \frac{1}{2}i$

GIẢI

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 1 - i \Rightarrow$ tọa độ $M(1;-1)$

Điểm N biểu diễn số phức $z_2 = 3 + 2i \Rightarrow$ tọa độ $N(3;2)$

Gốc tọa độ $O(0;0)$

- Tọa độ điểm $G\left(\frac{x_M+x_N+x_O}{3};\frac{y_M+y_N+y_O}{3}\right)=\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

  Vậy G là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{3}+\frac{1}{3}i \Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

VD5-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=3-4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z'=\frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

A. $S_{\Delta OMM'}=\frac{25}{4}$ **B.** $S_{\Delta OMM'}=\frac{25}{2}$ **C.** $S_{\Delta OMM'}=\frac{15}{4}$ **D.** $S_{\Delta OMM'}=\frac{15}{2}$

GIẢI

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1=3-4i \Rightarrow$ tọa độ $M(3;-4)$

  Điểm M' biểu diễn số phức $z'=\frac{1+i}{2}z \Rightarrow$ tọa độ $N\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$

  [▭] [1] [+] [ENG] [▼] [2] [▶] [×] [(] [3] [−] [4] [ENG] [)] [=]

  $\frac{1+i}{2}\times(3-4i)$

  $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$

  Gốc tọa độ $O(0;0)$

- Để tínhdiện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vecto trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O,M,M' là xong

  $\overrightarrow{OM}(3;-4;0)$, $\overrightarrow{OM'}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|$

  Tính $\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|$

  [MODE] [8] [1] [1] [3] [=] [−] [4] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [7] [÷] [2] [=] [−] [1] [÷] [2] [=] [0] [=] [AC] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [=]

  VctA·VctB

  12.5

  Vậy $\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|=12.5=\frac{25}{2} \Rightarrow S_{OMM'}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|=\frac{25}{4}$

  $\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

VD6-[Đề thi minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=iz_0$

A. $M\left(\frac{1}{2};2\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{4};1\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{4};1\right)$

GIẢI

- Sử dụng lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3 để giải phương trình $4z^2-16z+17=0$

  [MODE] [5] [3] [4] [=] [−] [1] [6] [=] [1] [7] [=] [=] [=]

  X1=

  $2+\frac{1}{2}i$



Vậy phương trình $4z^2-16z+17=0$ có hai nghiệm $z=2+\frac{1}{2}i$ và $z=2-\frac{1}{2}i$

➢ Để z_0 có phần ảo dương $\Rightarrow z=2-\frac{1}{2}i$. Tính $w=z_0 i$





Vậy phương trình $w=-\frac{1}{2}+2i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức w là $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

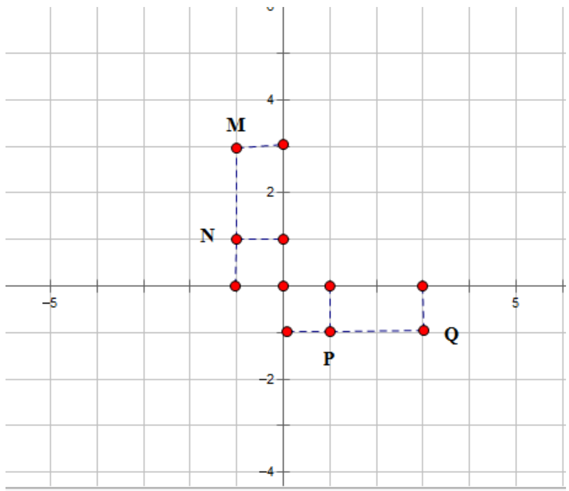
II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z=2+i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w=(1-i)z$

A.Điểm M **B.**Điểm N

C.Điểm P **D.** Điểm Q

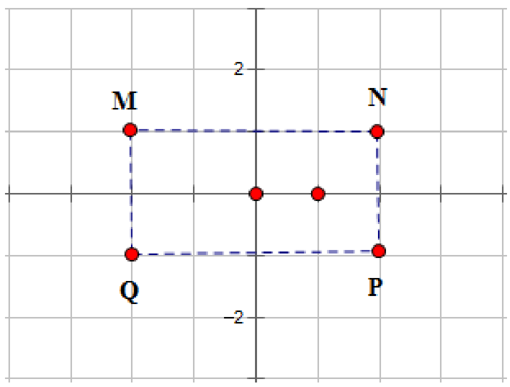


Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z=4z+5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M,N,P,Q ở hình bên .

A.Điểm N **B.**Điểm P

C.Điểm M **D.** Điểm Q



Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{4}{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i}$,

$(1-i)(1+2i)$, $-2i^3$ Khi đó tam giác ABC

A.Vuông tại C **B.**Vuông tại A **C.**Vuông cân tại B **D.** Tam giác đều

Bài 4-Các điểm A,B,C, A',B',C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

$1-i, 2+3i, 3+i$ và

$3i, 3-2i, 3+2i$ có G,G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. G trùng G' **B.** Vecto $\overrightarrow{GG'}=(1;-1)$

C. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GA'}$ **D.** Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

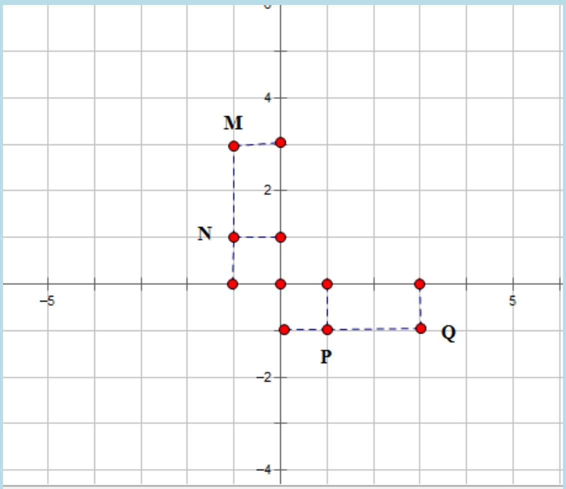
LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z=2+i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w=(1-i)z$

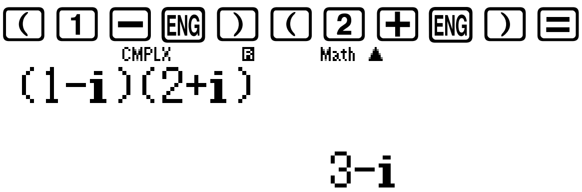
A.Điểm M **B.**Điểm N

C.Điểm P **D.** Điểm Q



GIẢI

- Tính số phức $w=(1-i)z$ bằng máy tính Casio



Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức w là $(3;-1)$. Đây là tọa độ điểm Q

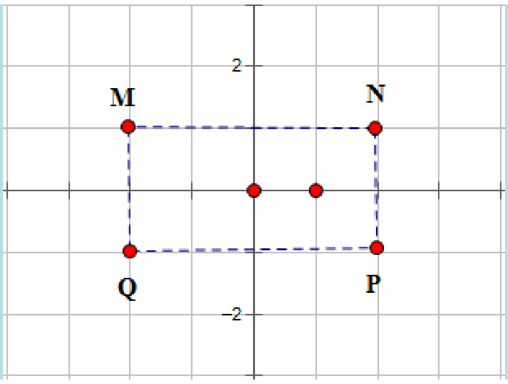
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z=4z+5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M,N,P,Q ở hình bên .

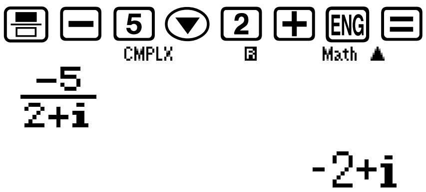
A.Điểm N **B.**Điểm P

C.Điểm M **D.** Điểm Q



GIẢI

- Cô lập $(2-i)z-4z=5 \Leftrightarrow -(2+i)z=5 \Leftrightarrow z=\frac{-5}{2+i}$
- Tìm số phức $z=\frac{-5}{2+i}$



Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức z là $(-2;1)$. Đây là tọa độ điểm M

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i}$, $(1-i)(1+2i)$, $-2i^3$ Khi đó tam giác ABC

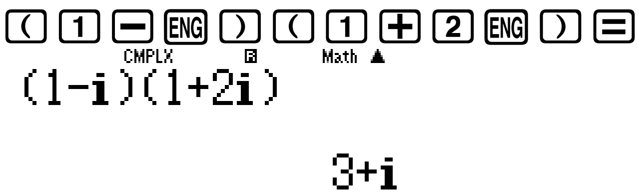
A.Vuông tại C **B.**Vuông tại A **C.**Vuông cân tại B **D.** Tam giác đều

GIẢI

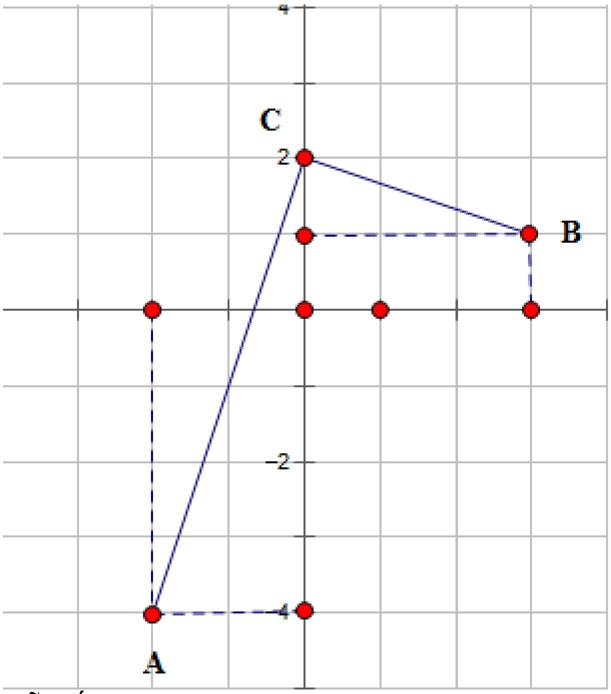
- Rút gọn $\frac{4}{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i}$ được $-2-4i$ vậy tọa độ điểm $A(-2;-4)$



- Rút gọn $(1-i)(1+2i)$ được $3+i$ vậy tọa độ điểm $B(3;1)$



- Rút gọn $-2i^3=-2i.i^2=2i$ vậy tọa độ điểm $C(0;2)$
- Để phát hiện tính chất của tam giác ABC ta chỉ cần biểu diễn trên hệ trục tọa độ là thấy ngay



Dễ thấy tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 4-Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số : $1-i, 2+3i, 3+i$ và $3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. G trùng G' **B.** Vecto $\overrightarrow{GG'} = (1;-1)$

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA'}$ **D.** Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

GIẢI

- Ta có tọa độ các đỉnh $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(3;1) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G(2;1)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \end{cases}$$

- Ta có tọa độ các đỉnh $A'(0;3)$, $B'(3;-2)$, $C'(3;2) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G(2;1)$

$$\begin{cases} x_{G'} = \dfrac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'}}{3} = 2 \\ y_{G'} = \dfrac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'}}{3} = 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $G \equiv G' \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 31. QUỸ TÍCH ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Mẹo giải nhanh

- Bài toán quỹ tích luôn đi lên từ định nghĩa. Ta luôn đặt $z = x + yi$, biểu diễn số phức theo yêu cầu đề bài, từ đó khử i và thu về một hệ thức mới :
- Nếu hệ thức có dạng $Ax + By + C = 0$ thì tập hợp điểm là đường thẳng
- Nếu hệ thức có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ thì tập hợp điểm là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R
- Nếu hệ thức có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì tập hợp điểm có dạng một Elip
- Nếu hệ thức có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì tập hợp điểm là một Hyperbol
- Nếu hệ thức có dạng $y = Ax^2 + Bx + C$ thì tập hợp điểm là một Parabol

2. Phương pháp Caso

- Tìm điểm đại diện thuộc quỹ tích cho ở đáp án rồi thế ngược vào đề bài, nếu thỏa mãn thì là đúng

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2-i| = |\bar{z}+2i|$

A. $4x-2y+1=0$ **B.** $4x-2y-1=0$ **C.** $4x+2y-1=0$ **D.** $4x-6y-1=0$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

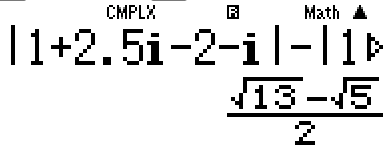
➢ Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. Ta hiểu : điểm M biểu diễn số phức z thì M có tọa độ $M(a;b)$.

Giả sử đáp án **A** đúng thì M thuộc đường thẳng $4x-2y+1=0$ thì $4a-2b+1=0$

Chọn $a=1$ thì $b=\frac{5}{2} \Rightarrow z = 1+2.5i$. Số phức z thỏa mãn $|z-2-i| = |\bar{z}+2i|$ thì $|z-2-i| - |\bar{z}+2i| = 0$

➢ Sử dụng máy tính Casio để kiểm tra

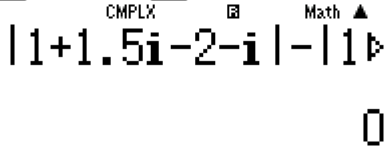
SHIFT hyp 1 + 2 . 5 ENG − 2 − ENG ▶ − SHIFT hyp 1 − 2 . 5 ENG + 2 ENG =



Ta thấy ra một kết quả khác 0 vậy $|z-2-i| - |\bar{z}+2i| = 0$ là sai và đáp án **A** sai

➢ Tương tự với đáp số B chọn $a=1$ thì $b=1.5$ và $z=1+1.5i$

SHIFT hyp 1 + 1 . 5 ENG − 2 − ENG ▶ − SHIFT hyp 1 − 1 . 5 ENG + 2 ENG =



Ta thấy kết quả ra 0 vậy $|z-2-i|-|\bar{z}+2i|=0$ là đúng và đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách mẹo**

➢ Đặt $z=x+yi$ (ta luôn đi lên từ định nghĩa) .

➢ Thế vào $|z-2-i|=|\bar{z}+2i|$ ta được

$$|(x-2)+(y-1)i|=|x^2+(-y+2)i|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(-y+2)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=x^2+(-y+2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2+y^2-4y+4$$
$$\Leftrightarrow 4x-2y-1=0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $4x-2y-1=0$

$\Rightarrow$ đáp án **B** là chính xác

❖ **Bình luận**

➢ Trong dạng toán này ta nên ưu tiên dùng mẹo vì tính nhanh gọn của nó

➢ Nhắc lại một lần nữa, luôn đặt $z=x+yi$ rồi biến đổi theo đề bài

VD2-[Thi thử sở GD-ĐT Hà Tĩnh lần 1 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $|2+z|=|1-i|$. Chọn phát biểu đúng

A.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng
B.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol
C.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn
D.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Elip

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

➢ Đặt $z=x+yi$.

➢ Thế vào $|2+z|=|1-i|$ ta được

$$|x+2+yi|=|1-i|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2;0)$ bán kính $R=\sqrt{2}$

Vậy đáp án **C** là chính xác

VD3-[Đề thi minh họa của bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

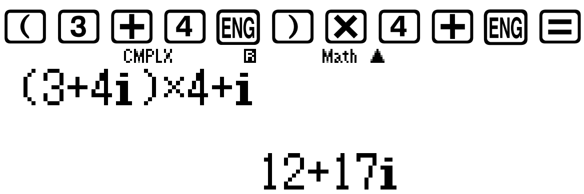
A. $r=4$ **B**. $r=5$ **C**. $r=20$ **D**. $r=22$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

➢ Để xây dựng 1 đường tròn ta cần 3 điểm biểu diễn của w , vì z sẽ sinh ra w nên đầu tiên ta sẽ chọn 3 giá trị đại diện của z thỏa mãn $|z|=4$

➢ Chọn $z=4+0i$ (thỏa mãn $|z|=4$). Tính $w_1=(3+4i)(4+0i)+i$



Ta có điểm biểu diễn của z_1 là $M(12;17)$

- Chọn $z = 4i$ (thỏa mãn $|z| = 4$). Tính $w_2 = (3+4i)(4i)+i$

(3 + 4 ENG) × 4 ENG + ENG =

(3+4i)×4i+i

-16+13i

Ta có điểm biểu diễn của z_2 là $N(-16;13)$

- Chọn $z = -4i$ (thỏa mãn $|z| = 4$). Tính $w_3 = (3+4i)(-4i)+i$

(3 + 4 ENG) (− 4 ENG) + ENG =

(3+4i)(-4i)+i

16-11i

Ta có điểm biểu diễn của z_3 là $P(16;-11)$

Vậy ta có 3 điểm M, N, P thuộc đường tròn biểu diễn số phức w

- Đường tròn này sẽ có dạng tổng quát $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Để tìm a, b, c ta sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 5 3
- MODE 5 2 1 2 = 1 7 = 1 = − 1 2 x^2 − 1 7 x^2 = − 1 6 = 1 3 = 1 = − 1 6 x^2 − 1 3 x^2 = 1 6 = − 1 1 = 1 = − 1 6 x^2 − 1 1 x^2 = =

X= 0

Y= -2

Z= -399

Vậy phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 - 2y - 399 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 20^2$

Bán kính đường tròn tập hợp điểm biểu diễn số phức w là 20 $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách mẹo**

- Đề bài yêu cầu tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức w vậy ta đặt $w = x + yi$.
- Thế vào $w = (3+4i)z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w-i}{3+4i} = \dfrac{x+(y-1)i}{3+4i}$. Tiếp tục rút gọn ta được

$$z = \frac{[x+(y-1)i](3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3x+4y-4+(-4x+3y-3)i}{25}$$

$$|z| = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{3x+4y-4}{25}\right)^2 + \left(\frac{-4x+3y-3}{25}\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2+25y^2+25-50y}{25^2} = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 399$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 20^2$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn bán kính $r = 20$

$\Rightarrow$ đáp án **C** là chính xác

❖ **Bình luận**

- Chức năng MODE 5 2 để tìm phương trình đường tròn được giải thích như sau :
  Đường tròn có dạng $x^2+y^2+ax+by+c=0$
  Với M thuộc đường tròn thì $12a+17b+c=-12^2-17^2$
  Với N thuộc đường tròn thì $-16a+13b+c=-16^2-13^2$
  Với P thuộc đường tròn thì $16a-11b+c=-16^2-11^2$
  Vậy ta lập được hệ phương trình 3 ẩn bậc nhất $\begin{cases}12a+17b+c=-12^2-17^2\\-16a+13b+c=-16^2-13^2\\16a-11b+c=-16^2-11^2\end{cases}$
  Và ta sử dụng chức năng giải hệ phương trình 3 ẩn bậc nhất MODE 5 2 để xử lý
- Hai cách đều hay và có ưu điểm riêng, tự luận sẽ tiết kiệm thời gian một chút nhưng việc tính toán rút gọn dễ nhầm lẫn, còn casio có vẻ bấm máy nhiều hơn nhưng tuyệt đối không sai.

VD4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 là đường tròn tâm I bán kính R (trừ đi một điểm)

A. $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\ R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ R=\frac{1}{2}$ **D.** $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\ R=\frac{1}{2}$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Đặt $z=x+yi$.
- Thế vào $\frac{z-1}{z-i}$ ta được $\frac{x-1+yi}{x+(y-1)i}=\frac{(x-1+yi)\left[x-(y-1)i\right]}{\left[x+(y-1)i\right]\left[x-(y-1)i\right]}$
  $=\frac{x^2-x+y^2-y+xyi-(x-1)(y-1)i}{x^2+(y-1)^2}$
  Để phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 thì $x^2-x+y^2-y=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
  Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ đáp án **B** là chính xác

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $4x+6y-3=0$ **B.** $4x-6y-3=0$ **C.** $4x+6y+3=0$ **D.** $4x-6y+3=0$

Bài 2-[Thi thử THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z : $|z|=|\bar{z}-3+4i|$ là phương trình có dạng

A. $6x+8y-25=0$ **B.** $3x+4y-3=0$ **C.** $x^2+y=25$

D. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

Bài 3-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=20$ **B.** $r=\sqrt{20}$ **C.** $r=\sqrt{7}$ **D.** $r=7$

Bài 4-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=|(1+i)z|$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

<u>Bài 5</u>-[Thi thử THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z|^2=z^2$ là :

A. Cả mặt phẳng **B.** Đường thẳng **C.** Một điểm **D.** Hai đường thẳng

<u>Bài 6</u>-Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z-\bar{z}+2i|$ là một Parabol có dạng:

A. $y=3x^2-6x+2$ **B.** $y=\frac{x^2}{2}-x$ **C.** $y=\frac{x^2}{3}-4$ **D.** $y=x^2+2x+\frac{1}{3}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

<u>Bài 1</u>-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $4x+6y-3=0$ **B.** $4x-6y-3=0$ **C.** $4x+6y+3=0$ **D.** $4x-6y+3=0$

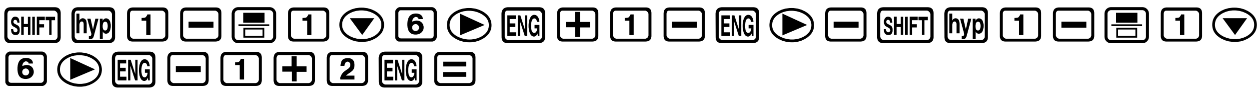
GIẢI

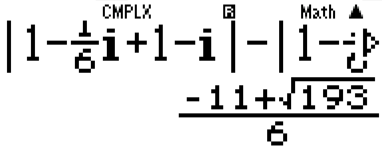
❖ **Cách 1: Casio**

- Giả sử đáp án A đúng, điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ thuộc đường thẳng $4x+6y-3=0$

Chọn $x=1$ thì $y=-\frac{1}{6}$ và số phức $z=1-\frac{1}{6}i$.

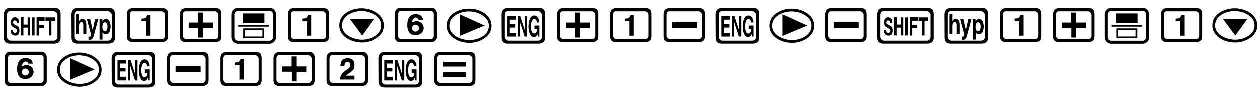
- Xét hiệu $|z+1-i|-|z-1+2i|$. Nếu hiệu trên $=0$ thì đáp án **A** đúng. Để làm việc này ta sử dụng máy tính Casio

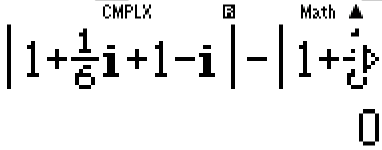




Hiệu trên khác 0 vậy đáp án **A** sai

- Thử với đáp án B. Chon $x=1$ thì $y=\frac{1}{6}$ và số phức $x=1+\frac{1}{6}i$. Xét hiệu :





Vậy hiệu $|z+1-i|-|z-1+2i|=0 \Leftrightarrow |z+1-i|=|z-1+2i| \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách 2: Tự luận**

- Vì đề bài yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z nên ta đặt $z=x+yi$
- Theo đề bài $|z+1-i|=|z-1+2i|$ $|x+1+(y-1)i|=|x-1+(y+2)i|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+4y+4$

$\Leftrightarrow 4x-6y-3=0$. Vậy đáp án chính xác là **B**

Bài 2-[Thi thử THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z : $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$ là phương trình có dạng

A. $6x + 8y - 25 = 0$ **B.** $3x + 4y - 3 = 0$ **C.** $x^2 + y = 25$

D. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

GIẢI

- Đặt số phức $z = x + yi$.

Ta có : $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |x + yi| = |x - 3 + (4-y)i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-3)^2 + (4-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow 6x + 8y - 25 = 0$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

Bài 3-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = 3 - 2i + (2-i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

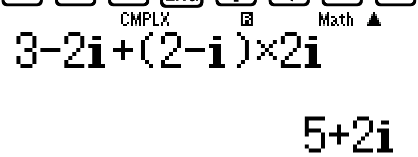
A. $r = 20$ **B.** $r = \sqrt{20}$ **C.** $r = \sqrt{7}$ **D.** $r = 7$

GIẢI

❖ **Cách 1: Casio**

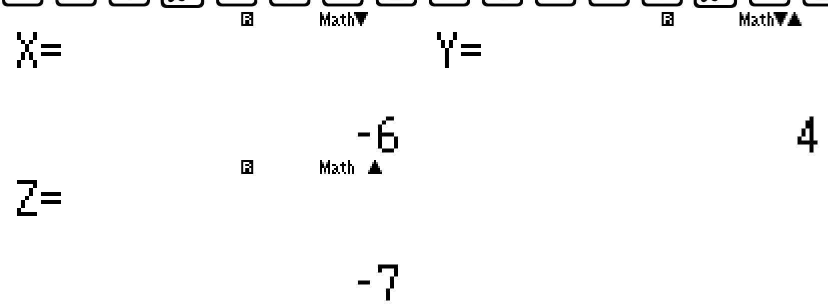
- Chọn số phức $z = 2$ thỏa mãn $|z| = 2$ vậy $w_1 = 3 - 2i + (2-i).2 = 7 - 4i$. Ta có điểm biểu diễn của w_1 là $M(7;-4)$
- Chọn số phức $z = -2$ thỏa mãn $|z| = 2$ vậy $w_2 = 3 - 2i + (2-i).(-2) = -1 + 0i$. Ta có điểm biểu diễn số phức w_2 là $N(-1;0)$
- Chọn số phức $z = 2i$ thỏa mãn $|z| = 2$ vậy $w_3 = 3 - 2i + (2-i).(2i) = 5 + 2i$. Ta có điểm biểu diễn số phức w_3 là $P(5;2)$

3 − 2 ENG + (2 − ENG) × 2 ENG =



- Sử dụng máy tính tìm phương trình đường tròn di qua 3 điểm M, N, P

MODE 5 2 7 = − 4 = 1 = − 7 x^2 − 4 x^2 = − 1 = 0 = 1 = − 1 x^2 = 5 = 2 = 1 = − 5 x^2 − 2 x^2 = =



Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{20})^2$ sẽ có bán kính là $r = \sqrt{20}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách 2: Tự luận**

- Vì đề bài yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w nên ta đặt $w = x + yi$

- Theo đề bài $w=3-2i+(2-i)z \Rightarrow z=\dfrac{w-3+2i}{2-i}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{x-3+(y+2)i}{2-i}=\dfrac{[x-3+(y+2)i](2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2x-y-8+(x+2y+1)}{3}$

- Ta có $|z|=2 \Rightarrow \left(\dfrac{2x-y-8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{x+2y+1}{5}\right)^2=4$

$\Leftrightarrow (2x-y-8)^2+(x+2y+1)^2=100$

$\Leftrightarrow 5x^2+5y^2-30x+20y+65=100$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+4y=7$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{20}\right)^2$

Bài 4-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=|(1+i)z|$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

GIẢI

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Ta có : $|z-1|=|(1+i)z| \Leftrightarrow |x+yi-1|=|(x+yi)(1+i)| \Leftrightarrow |x-1+yi|=|x-y+(x+y)i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x-y)^2+(x+y)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

Bài 5-[Thi thử THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z|^2=z^2$ là :

A. Cả mặt phẳng **B.** Đường thẳng **C.** Một điểm **D.** Hai đường thẳng

GIẢI

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Ta có $|z|^2=z^2 \Leftrightarrow |x+yi|^2=(x+yi)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+2xyi+(yi)^2$

$2y^2-2xyi=0 \Leftrightarrow y(y-xi) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y-ix=0 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $y=0$ và $y-ix=0$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

Bài 6-Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z-\overline{z}+2i|$ là một Parabol có dạng:

A. $y=3x^2-6x+2$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{2}-x$ **C.** $y=\dfrac{x^2}{3}-4$ **D.** $y=x^2+2x+\dfrac{1}{3}$

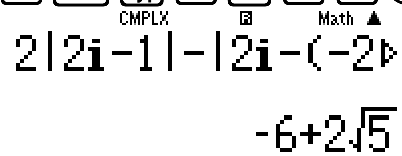
GIẢI

- Đặt số phức $z = x + yi$.
- Nếu đáp số A đúng thì đúng với mọi $z = x + yi$ thỏa mãn $y = 3x^2 - 6x + 2$.

  Chọn một cặp $(x; y)$ bất kì thỏa $y = 3x^2 - 6x + 2$ ví dụ $A(0;2) \Rightarrow z = 2i$

  Xét hiệu $2|z-1| - |z - \bar{z} + 2i|$

  [2] [SHIFT] [hyp] [2] [ENG] [−] [1] [▶] [−] [SHIFT] [hyp] [2] [ENG] [−] [(] [−] [2] [ENG] [)] [+] [2] [ENG] [=]

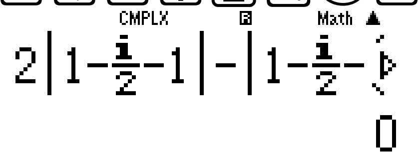


  Vậy $2|z-1| - |z - \bar{z} + 2i| = -6 + 2\sqrt{5} \neq 0$

  $\Rightarrow 2|z-1| \neq |z - \bar{z} + 2i| \Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự với đáp số B chọn $z = 1 - \frac{1}{2}i$. Xét hiệu $2|z-1| - |z - \bar{z} + 2i|$

  [2] [SHIFT] [hyp] [1] [−] [▭/▭] [ENG] [▼] [2] [▶] [−] [1] [▶] [−] [SHIFT] [hyp] [1] [−] [▭/▭] [ENG] [▼] [2] [▶] [−] [(] [1] [+] [▭/▭] [ENG] [▼] [2] [▶] [)] [+] [2] [ENG] [=]



  Vậy $2|z-1| - |z - \bar{z} + 2i| = 0 \Rightarrow 2|z-1| = |z - \bar{z} + 2i| \Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 32. CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Bất đẳng thức thường gặp

- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** :Cho các số thực a,b,x,y ta luôn có

  $\left(ax+by\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

- **Bất đẳng thức Vectơ** : Cho 2 vecto $\vec{u}\left(x;y\right)$ và $\vec{v}\left(x';y'\right)$ ta luôn có $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \ge \left|\overrightarrow{u+v}\right|$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2} \ge \sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2}$

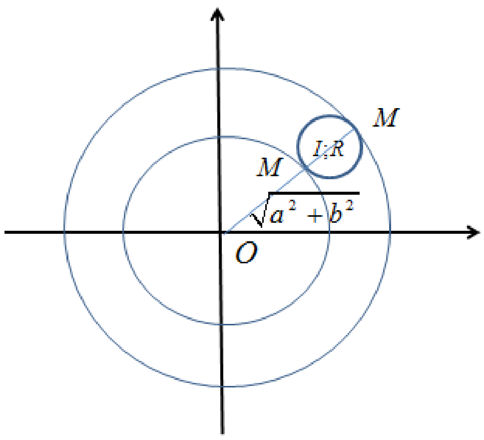
  Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}<0$

2. Phương pháp mẹo sử dụng sử tiếp xúc

- **Dạng 1**: Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $\left(C\right)$ bán kính R. Với mỗi điểm M thuộc đường tròn $\left(C\right)$ thì cũng thuộc đường tròn $\left(C'\right)$ tâm gốc tọa độ bán kính $OM=\sqrt{a^2+b^2}$.

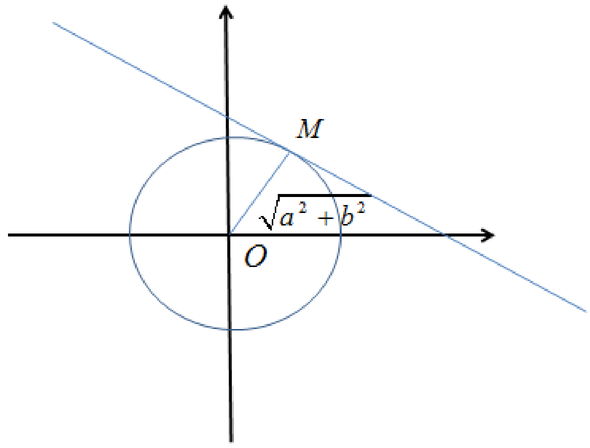
  +)Để $\left|z\right|$ lớn nhất thì OM lớn nhất đạt được khi đường tròn $\left(C'\right)$ tiếp xúc trong với đường tròn $\left(C\right)$ và $OM=OI+R$

  +)Để $\left|z\right|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất đạt được khi đường tròn $\left(C'\right)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $\left(C\right)$ và $OM=OI-R$

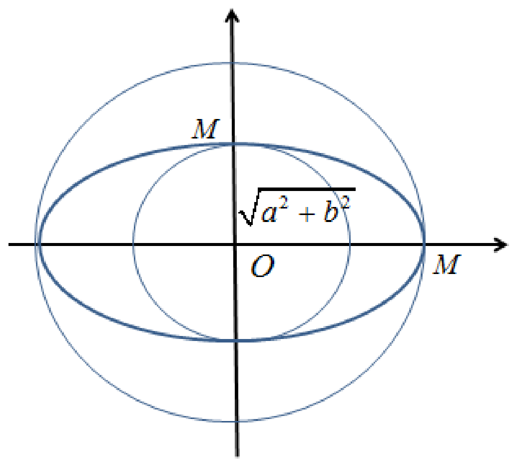


- **Dạng 2** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\left(d\right)$. Với mỗi điểm M thuộc $\left(d\right)$ thì cũng thuộc đường tròn $\left(C'\right)$

  +)Để $\left|z\right|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó OM vuông góc với $\left(d\right)$ và $OM=d\left(O;\left(d\right)\right)$



- **Dạng 3** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biễu diễn số phức z là Elip có đỉnh thuộc trục lớn $A(a;0)$ và đỉnh thuộc trục nhỏ $B(0;b)$. Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (E)
  +)Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và
  $\max|z| = OM = OA$
  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và
  $\max|z| = OM = OB$



- **Dạng 4** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biễu diễn số phức z là Hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đỉnh thuộc trục thực $A'(-a;0), A(a;0)$ thì số phức z có môđun nhỏ nhất nếu điểm biểu diễn số phức z này trùng với các đỉnh trên. (môđun lớn nhất không tồn tại)

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]
Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.
A. $z=-1+i$ **B**. $z=-2+2i$ **C.** $z=2+2i$ **D**. $z=3+2i$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

➢ Trong các số phức ở đáp án, ta sẽ tiến hành xắp xếp các số phức theo thứ tự môđun tăng dần :
$|-1+i| < |-2+2i| = |2+2i| < |3+2i|$

- Tiếp theo sẽ tiến hành thử nghiệm từng số phức theo thứ tự môđun tăng dần, số phức nào thỏa mãn hệ thức điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ đầu tiên thì là đúng

  Với $z=-1+i$ Xét hiệu : $|(-1+i)-2-4i|-|(-1+i)-2i|$

  SHIFT hyp (− 1 + ENG) − 2 − 4 ENG ▶ − SHIFT hyp − 1 + ENG − 2 ENG =

  CMPLX Math ▲
  |(-1+i)-2-4i|-|▶

  $2\sqrt{2}$

  Ra một giá trị khác 0 vậy $z=-1+i$ không thỏa mãn hệ thức. $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Tương tự như vậy với $z=2+2i$

  SHIFT hyp 2 + 2 ENG − 2 − 4 ENG ▶ − SHIFT hyp 2 + 2 ENG − 2 ENG =

  CMPLX Math ▲
  |2+2i-2-4i|-|2+▶

  0

  Vậy số phức $z=2+2i$ thỏa mãn hệ thức $\Rightarrow$ Đáp số **C** là đáp số chính xác

❖ **Cách mẹo**

Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-8b+16=a^2+b^2-4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b=16$

$\Leftrightarrow a+b-4=0$

Trong các đáp án chỉ có đáp án **C** thỏa mãn $a+b-4=0 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách tự luận**

Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-8b+16=a^2+b^2-4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b=16$

$\Leftrightarrow a+b=4$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$16=(a+b)^2\le(1^2+1^2)(a^2+b^2)\Rightarrow|z|^2=a^2+b^2\ge 8$

$\Rightarrow |z|\ge 2\sqrt{2}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1}\\ a+b=4\end{cases} \Leftrightarrow a=b=2\Rightarrow z=2+2i$

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Với các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z|=4$ **B.** $\max|z|=3$ **C.** $\max|z|=7$ **D.** $\max|z|=6$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(a+bi)(1+i)+1-7i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |a-b+1+(a+b-7)i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2 + (a+b-7)^2 = 2$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 50 - 12a - 16b = 2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 8b + 25 = 1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=1$. Ta gọi đây là đường tròn (C)

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z = a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C'), Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì O, I, M thẳng hàng (như hình) và (C') tiếp xúc trong với (C)

  Khi đó $OM = OI + R = 5 + 1 = 6$

  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

- Gọi số phức z có dạng $z = a+bi$. z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(a+bi)(1+i)+1-7i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |a-b+1+(a+b-7)i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2 + (a+b-7)^2 = 2$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 50 - 12a - 16b = 2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 8b + 25 = 1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 1$

- Ta có $|z|^2 = a^2 + b^2 = 6a + 8b - 24 = 6(a-3) + 8(b-4) + 26$

  Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có : $6(a-3)+8(b-4) \le |6(a-3)+8(b-4)|$

  $\le \sqrt{(6^2+8^2)\left[(a-3)^2+(b-4)^2\right]} = 10$

  Vậy $|z|^2 \le 36 \Leftrightarrow |z| \le 6$

  $\Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

❖ **Bình luận**

- Việc sử dụng bất đẳng thức để đánh giá $|z|$ là rất khó khăn, đòi hỏi học sinh phải nắm rất vững bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến dạng của nó
- Trong tình huống của bài toán này, khi so sánh 2 cách giải ta thấy dùng mẹo tiếp xúc tỏ ra đơn giản dễ hiểu và tiết kiệm thời gian hơn.

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $|z-4| + |z+4| = 10$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là :

A.10 và 4 **B.** 5 và 4 **C.** 4 và 3**D.** 5 và 3

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z = a+bi$. z thỏa mãn $|z-4| + |z+4| = 10$

$\Leftrightarrow |a-4+bi| + |a+4+bi| = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2} + \sqrt{(a+4)^2+b^2} = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2} = 10-\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a^2+8a+16+b^2 = 100+a^2-8a+16+b^2-20\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{(a-4)^2+b^2} = 100-16a$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(a-4)^2+b^2} = 25-4a$

$\Leftrightarrow 25\left(a^2-8a+16+b^2\right) = 625-200a+16a^2$

$\Leftrightarrow 9a^2+25b^2 = 225$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{9} = 1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường Elip đỉnh thuộc đáy lớn là $A(5;0)$, đỉnh thuộc đáy nhỏ là $B(0;3)$

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và $M \equiv A(5;0) \Rightarrow OM=5$

  $\Rightarrow \max|z|=5$
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và $M \equiv B(0;3) \Rightarrow OM=3$

  $\Rightarrow \min|z|=3$

  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$

  $\Leftrightarrow |a-4+bi|+|a+4+bi|=10$

  $\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

  $\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(-a+4)^2+(-b)^2}=10$

  Theo bất đẳng thức vecto ta có :

  $\Leftrightarrow 10=\sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(-a+4)^2+(-b)^2} \geq \sqrt{\left[(a+4)-(-a+4)\right]^2+\left[b-(-b)\right]^2}$

  $\Leftrightarrow 10 \geq \sqrt{4a^2+4b^2}$

  $\Leftrightarrow 10 \geq 2|z| \Rightarrow |z| \leq 5$
- Ta có $\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

  Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

  $100=\left(\sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}\right)^2 \leq \left(1^2+1^2\right)\left[(a-4)^2+b^2+(a+4)^2+b^2\right]$

  $\Leftrightarrow 100 \leq 2\left(2a^2+2b^2+32\right)$

  $\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+32 \geq 50$

  $\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 9$

  Vậy $|z|^2 \geq 9 \Leftrightarrow |z| \leq 3$

  $\Rightarrow 3 \leq |z| \leq 5 \Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

VD4-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2|-|z+2|=2$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=1-\sqrt{3}i$ **B.** $z=-1+\sqrt{3}i$ **C.** $z=1$ **D.** $z=\sqrt{3}+i$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

➢ Gọi số phức z có dạng $z = x + yi$. z thỏa mãn $|z-2|-|z+2|=2$

$\Leftrightarrow |x-2+yi|-|x+2+yi|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=2+\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$

$\Leftrightarrow -1-2x=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\ \left(-1-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 1+4x+4x^2=x^2+4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là Hypebol $(H): x^2-\frac{y^2}{3}=1$ có 2 đỉnh thuộc thực là $A'(-1;0), B(1;0)$

➢ Số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn $M(x;y)$ và có môđun là $OM=\sqrt{a^2+b^2}$. Để OM đạt giá trị nhỏ nhất thì M trùng với hai đỉnh của (H)

$M \equiv A \Rightarrow M(1;0) \Rightarrow z=1$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z-2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** –25 **C.** 16 **D.** –16

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z-2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|2z-2+2i|=1 \Leftrightarrow |2x-2+2yi+2i|=1$

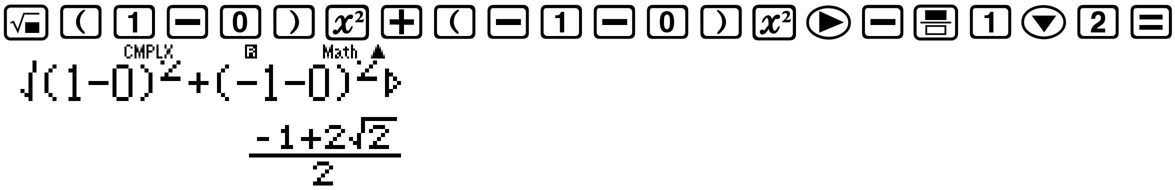
$\Leftrightarrow (2x-2)^2+(2y+2)^2=1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{1}{4}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì vậy để $R=|z|$ nhỏ nhất thì đường tròn (C') phải tiếp xúc ngoài với đường (C')

Khi đó điểm M sẽ là tiếp điểm của đường tròn (C) và (C') và $|z|=OM=OI-R=\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

<u>Bài 2</u>-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** -25 **C.** 16 **D.** -16

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$

$\Leftrightarrow |x+(y-3)i|+|y+3+xi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(y+3)^2+x^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(y+3)^2+x^2}=10-\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$\Leftrightarrow (y+3)^2+x^2=100-20\sqrt{x^2+(y-3)^2}+x^2+(y-3)^2$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2+(y-3)^2}=100-12y$

$\Leftrightarrow 25x^2+16y^2=400$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường Elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ có 2 đỉnh thuộc trục nhỏ là $A(-4;0), A'(4;0)$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì elip (E) và đường tròn (C) có cùng tâm O nên để OM nhỏ nhất thì M là đỉnh thuộc trục nhỏ

$\Rightarrow M\equiv A'\Rightarrow z_1=-4$, $M\equiv A\Rightarrow z_2=4$

Tổng hợp $z_1.z_2=(-4).4=-16$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Mở rộng**

- Nếu đề bài hỏi tích z_1z_2 với $|z_1|,|z_2|$ có giá trị lớn nhất thì hai điểm M biểu diễn hai số phức trên là hai đỉnh thuộc trục lớn $B(0;-5), B'(0;5)$

$\Rightarrow M \equiv B' \Rightarrow z_1 = -5i$, $M \equiv A \Rightarrow z_2 = 5i$

Tổng hợp $z_1 z_2 = 5i.(-5i) = -25i^2 = 25$

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$

$\Leftrightarrow |-y-3+xi| = |x-2+(y-1)i|$

$\Leftrightarrow (-y-3)^2 + x^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 + x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 100 - 12y$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d): x + 2y + 1 = 0$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thì $|z| = OM \geq OH$ với H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d) và OH là khoảng cách từ điểm O lên đường thẳng (d)

Tính $OH = d(O;(d)) = \frac{|1.0 + 2.0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $|z| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

$\left|x + yi + \frac{1}{x + yi}\right| = \left|\frac{x^2 - y^2 + 1 + 2xyi}{x + yi}\right| = \left|\frac{x^3 - xy^2 + x + x^2yi + y^3i - yi + 2xy^2}{x^2 + y^2}\right|$

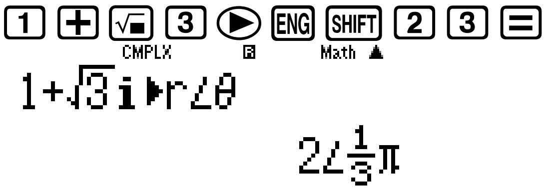
PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 33. PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Chuyển số phức về dạng lượng giác

- **Dạng lượng giác của số phức** : Cho số phức z có dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì ta luôn có :
  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
- Lệnh chuyển số phức $z = a + bi$ về dạng lượng giác : Lệnh SHIFT 2 3
  Bước 1: Nhập số phức $z = a + bi$ vào màn hình rồi dùng lệnh SHIFT 2 3 (Ví dụ $z = 1 + \sqrt{3}i$)



Bước 2: Từ bảng kết quả ta đọc hiểu $r = 2$ và $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

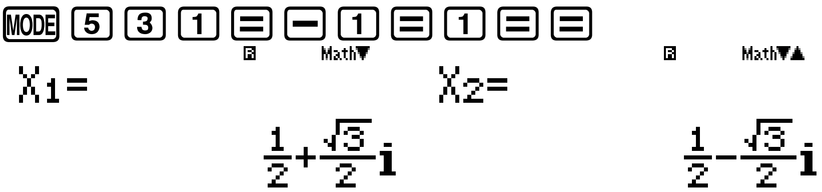
Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng :

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

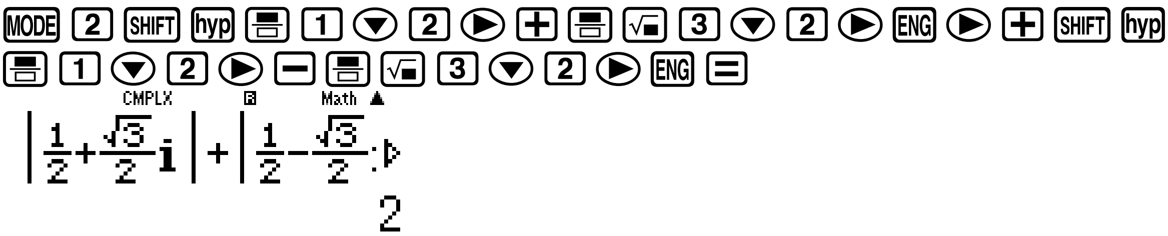
GIẢI

❖ **Cách Casio**

➢ Tính nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - z + 1 = 0$ bằng chức năng MODE 5 3



➢ Vậy ta được hai nghiệm $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Tính tổng Môđun của hai số phức trên ta lại dùng chức năng SHIFT HYP



$\Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2$ ta thấy **B** là đáp án chính xác

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^{2016} + z_2^{2016}$:

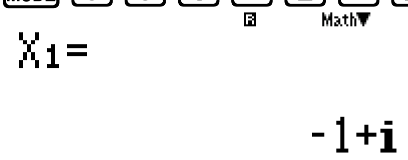
A. 2^{1009} **B.** 0 **C.** 2^{2017} **D.** 2^{1008}

GIẢI

❖ **Cách Casio 1**

- Tính nghiệm của phương trình bậc hai $z^2+2z+2=0$ bằng chức năng MODE 5 3

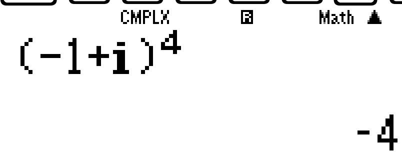
MODE 5 3 1 = 2 = 2 = =





- Ta thu được hai nghiệm $z_1=-1+i$ và $z_2=-1-i$. Với các cụm đặc biệt $-1+i$, $-1-i$ ta có điều đặc biệt sau: $(-1+i)^4=-4$, $(-1-i)^4=-4$

MODE 2 (− 1 + ENG) $x^■$ 4 =



Vậy $P=z_1^{2016}+z_2^{2016}=(-1+i)^{2016}+(-1-i)^{2016}=\left[(-1+i)^4\right]^{504}+\left[(-1-i)^4\right]^{504}$

$=(-4)^{504}+(-4)^{504}=4^{504}+4^{504}=2^{1008}+2^{1008}=2.2^{1008}=2^{1009}$

$P=z_1^{2016}+z_2^{2016}=2^{1009}$ ta thấy **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách Casio 2**

- Ngoài cách sử dụng tính chất đặc biệt của cụm $(-1\pm i)^4$ ta có thể xử lý $-1\pm i$ bằng cách đưa về dạng lượng giác bằng lệnh SHIFT 2 3

Với $z_1=-1+i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

− 1 + ENG SHIFT 2 3 =

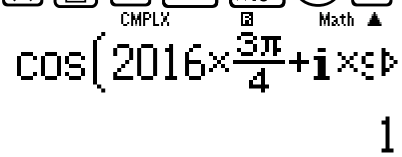


Ta nhận được $r=\sqrt{2}$ và góc $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow z_1^{2016}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left(\cos 2016.\dfrac{3\pi}{4}+i\sin 2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)$

- Tính $\cos\left(2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)+i.\sin\left(2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)$

cos 2 0 1 6 × ▭ 3 SHIFT ×10^x ▼ 4 ▶ + ENG × sin 2 0 1 6 × ▭ 3 SHIFT ×10^x ▼ 4 ▶)) DEL =



$z_1^{2016}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}=2^{1008}$

- Tương tự $z_2^{2016}=2^{1008}\Rightarrow T=2^{1009}$

VD3-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Kí hiệu z_1,z_2,z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-z^2-12=0$. Tính tổng :

$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

A. $T=4$ **B.** $T=2\sqrt{3}$ **C.** $T=4+2\sqrt{3}$ **D.** $T=2+2\sqrt{3}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

➤ Để tính nghiệm của phương trình ta dùng chức năng MODE 5. Tuy nhiên máy tính chỉ tính được phương trình bậc 2 và 3 nên để tính được phương trình bậc 4 trùng phương $z^4 - z^2 - 12 = 0$ thì ta coi $z^2 = t$ khi đó phương trình trở thành $t^2 - t - 12 = 0$

MODE 5 3 1 = − 1 = − 1 2 = =

X1= 4 X2= -3

Vậy $\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-3 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} z^2=4 \\ z^2=-3 \end{array}\right.$

➤ Với $z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$

➤ Với $z^2 = -3$ ta có thể đưa về $z^2 = 3i^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}i$ với $i^2 = -1$. Hoặc ta có thể tiếp tục sử dụng chức năng MODE 5 cho phương trình $z^2 = -3 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0$

MODE 5 3 1 = 0 = 3 = =

X1= √3 i X2= -√3 i

Tóm lại ta sẽ có 4 nghiệm $z = \pm 1, z = \pm\sqrt{3}i$

➤ Tính T ta lại sử dụng chức năng tính môđun SHIFT HYP

MODE 2 SHIFT hyp 2 ▶ + SHIFT hyp − 2 ▶ + SHIFT hyp √ 3 ▶ ENG ▶ + SHIFT hyp − √ 3 ▶ ENG =

|2|+|−2|+|√3 i|+▶

4+2√3

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Giải phương trình sau trên tập số phức : $z^3 + (i+1)z^2 + (i+1)z + i = 0$

A. $z = -i$ **B.** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **C.** $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **D.** Cả **A**, **B**, **C** đều đúng

GIẢI

❖ **Cách Casio**

➤ Để kiểm tra nghiệm của 1 phương trình ta sử dụng chức năng CALC

ALPHA) x■ 3 ▶ + (ENG + 1) ALPHA) x² + (ENG + 1) ALPHA) + ENG CALC − ENG =

X? -i X³+(i+1)X²+(i+1▶ 0

Vậy $z = -i$ là nghiệm

➤ Tiếp tục kiểm tra $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ nếu giá trị này là nghiệm thì cả đáp án **A** và **B** đều đúng có nghĩa là đáp án **D** chính xác. Nếu giá trị này không là nghiệm thì chỉ có đáp án **A** đúng duy nhất.

CALC − (1 ÷ 2) + (√ 3) ÷ 2) ENG =

CMPLX Math ▲
X³+(i+1)X²+(i+1▷

0

Vậy $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ tiếp tục là nghiệm có nghĩa là đáp án **A** và **B** đều đúng

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

➢ Để giải phương trình số phức xuất hiện số i trong đó ta không thể sử dụng chức năng MODE 5 được mà phải tiến hành nhóm nhân tử chung

Phương trình $\Leftrightarrow z^3+z^2+z+\left(z^2+z+1\right)i=0$

$$\Leftrightarrow (z+i)\left(z^2+z+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-i\\ z^2+z+1=0\end{array}\right.$$

➢ Phương trình $z^2+z+1=0$ không chứa số i nên ta có thể sử dụng máy tính Casio với chức năng giải phương trình MODE 5

MODE 5 3 1 = 1 = 1 = =

X1= $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ X2= $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm $z=-i;z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

<u>VD5</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào có hai nghiệm $z_1=1+\sqrt{3};z_2=1-\sqrt{3}$

A. $z^2+i\sqrt{3}z+1=0$ **B**. $z^2+2z+4=0$ **C**. $z^2-2z+4=0$ **D**. $z^2-2z-4=0$

GIẢI

➢ Ta hiểu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ nếu có hai nghiệm thì sẽ tuân theo định lý Vi-et (kể cả trên tập số thực hay tập số phức)

$$\begin{cases}z_1+z_2=-\frac{b}{a}\\ z_1z_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

➢ Tính $z_1+z_2=2$

MODE 2 1 + √■ 3 ▶ ENG + 1 − √■ 3 ▶ ENG =

CMPLX Math ▲
1+√3i+1−√3i

2

Tính $z_1z_2=4$

(1 + √■ 3 ▶ ENG) (1 − √■ 3 ▶ ENG) =

CMPLX Math ▲
(1+√3i)(1−√3i)

4

Rõ ràng chỉ có phương trình $z^2-2z+4=0$ có $-\frac{b}{a}=2$ và $\frac{c}{a}=4$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

VD6-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]
Phương trình $z^2+iz+1=0$ có bao nhiêu nghiệm trong tập số phức :
A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Vô số

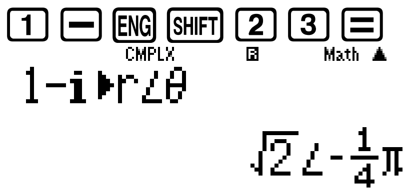
GIẢI

- Ta phân biệt : Trên tập số thực phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ sẽ có hai nghiệm phân biệt nếu $\Delta>0$, có hai nghiệm kép nếu $\Delta=0$, vô nghiệm nếu $\Delta<0$. Tuy nhiên trên tập số phức phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có 1 nghiệm duy nhất nếu $\Delta=0$, có hai nghiệm phân biệt nếu $\left[\begin{array}{l}\Delta>0\\ \Delta<0\end{array}\right.$
- Vậy ta chỉ cần tính Δ là xong. Với phương trình $z^2+iz+1=0$ thì $\Delta=i^2-4=-5$ là một đại lượng <0 vậy phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt
  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD7-Phần thực của số phức z là bao nhiêu biết $z=\dfrac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$
A. $-1+i$ **B.** 1 **C.** $3-2i$ **D.** 2^5i

GIẢI

- Để xử lý số phức bậc cao (>3) ta sử đưa số phức về dạng lượng giác và sử dụng công thức Moa-vơ . Và để dễ nhìn ta đặt $z=\dfrac{z_1^{10}.z_2^5}{z_3^{10}}$
- Tính $z_1=1-i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Để tính r và φ ta lại sử dụng chức năng SHIF 2 3



Vậy $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4}+i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$ $z_1^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos 10.\dfrac{-\pi}{4}+i\sin 10.\dfrac{-\pi}{4}\right)$

Tính $\cos 10.\dfrac{-\pi}{4}+i\sin 10.\dfrac{-\pi}{4}$

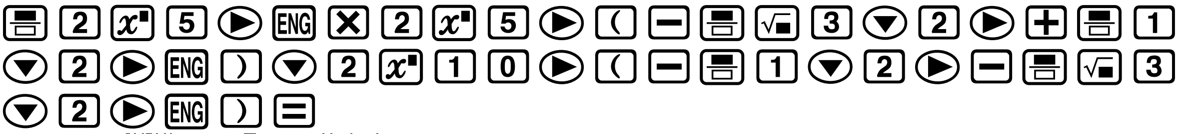


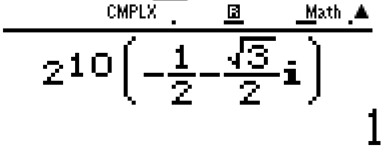
Vậy $z_1^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}.i=2^5.i$

- Tương tự $z_2^5=2^5\left(\cos 5.\dfrac{\pi}{6}+i\sin 5.\dfrac{\pi}{6}\right)=2^5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$z_3^{10}=2^{10}\left(\cos 10.\dfrac{-2\pi}{3}+i\sin 10.\dfrac{-2\pi}{3}\right)=2^{10}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tổng hợp $z=\dfrac{z_1^{10}.z_2^5}{z_3^{10}}=\dfrac{2^5i.2^5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)}{2^{10}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$





Vậy $z=1\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho phương trình $z^2-2z+17=0$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2 . Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ là :

A. $2\sqrt{17}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{15}$

Bài 2-[Đề thi toán Đại học – Cao đẳng khối A năm 2009]

Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$

A. $2\sqrt{10}$ **B.** 20 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $10\sqrt{3}$

Bài 3-[Thi thử Group Nhóm toán lần 5 năm 2017]

Kí hiệu z_1,z_2,z_3 là nghiệm của phương trình $z^3+27=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|$

A. $T=0$ **B.** $T=3\sqrt{3}$ **C.** $T=9$ **D.** $T=3$

Bài 4-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4-3z^2-2=0$. Tính tổng sau :

$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

A. 5 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Bài 5-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Xét phương trình $z^3=1$ trên tập số phức . Tập nghiệm của phương trình là :

A. $S=\{1\}$ **B.** $S=\left\{1;\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$ **C.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **D.** $S=\left\{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Bài 6-Biết z là nghiệm của phương trình $z+\frac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^{2009}+\frac{1}{z^{2009}}$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-\frac{5}{2}$ **D.** $P=\frac{7}{4}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho phương trình $z^2-2z+17=0$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2 . Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ là :

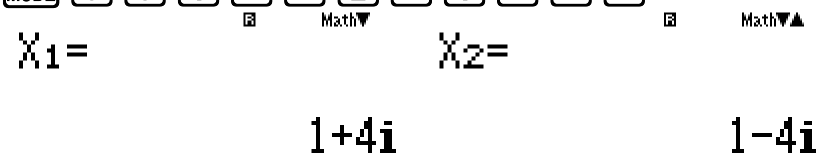
A. $2\sqrt{17}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{15}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

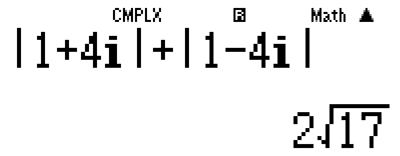
- Tìm hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+17=0$





- Tính tổng hai môđun bằng lệnh SHIFT HYP





Vậy $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{17}\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-[Đề thi toán Đại học – Cao đẳng khối A năm 2009]

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$

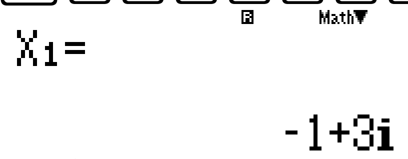
A. $2\sqrt{10}$ **B.** 20 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $10\sqrt{3}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Tìm hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$

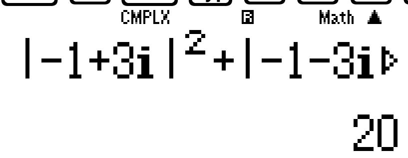
MODE 5 3 1 = 2 = 1 0 = =





- Tính tổng bình phương hai môđun bằng lệnh SHIFT HYP

MODE 2 SHIFT hyp − 1 + 3 ENG ▶ x^2 + SHIFT hyp − 1 − 3 ENG ▶ x^2 =



Vậy $A=|z_1|^2+|z_2|^2=20\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử Group Nhóm toán lần 5 năm 2017]

Kí hiệu z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3+27=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|$

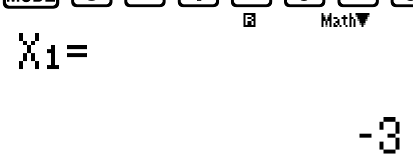
A. $T=0$ **B.** $T=3\sqrt{3}$ **C.** $T=9$ **D.** $T=3$

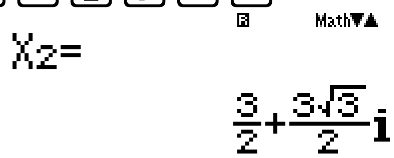
GIẢI

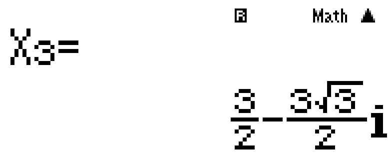
❖ **Cách Casio**

- Tính nghiệm của phương trình $z^3+27=0$ bằng chức năng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = 0 = 0 = 2 7 = =



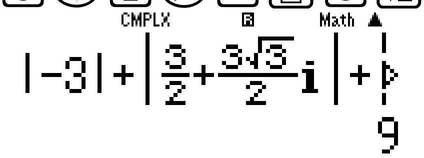




Vậy $z_1=-3, z_2=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i, z_3=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

- Tính tổng môđun $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|$

MODE 5 4 1 = 0 = 0 = 2 7 = = = = MODE 1 MODE 2 SHIFT hyp − 3 ▶ + SHIFT hyp ▭/▭ 3 ▼ 2 ▶ + ▭/▭ 3 √▭ 3 ▼ 2 ▶ ENG ▶ + SHIFT hyp ▭/▭ 3 ▼ 2 ▶ − ▭/▭ 3 √▭ 3 ▼ 2 ▶ ENG =



Vậy $T=9\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 4-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4-3z^2-2=0$. Tính tổng sau :

$T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. 5 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Đặt $t = z^2$. Tìm nghiệm của phương trình $2t^2 - 3t - 2 = 0$

MODE 5 3 2 = − 3 = − 2 = =





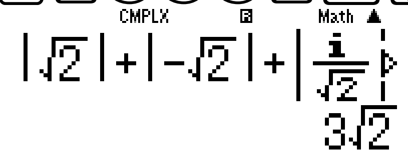
Vậy $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2 \\ z^2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

- Với $z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$

Với $z^2 = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow z^2 = \dfrac{i^2}{2} \Rightarrow z = \pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

- Tính tổng môđun $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

MODE 2 SHIFT hyp √ 2 ▶ ▶ + SHIFT hyp − √ 2 ▶ ▶ + SHIFT hyp ▭ ENG ▼ √ 2 ▶ ▶ ▶ + SHIFT hyp ▭ − ENG ▼ √ 2 =



Vậy $T = 3\sqrt{2} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 5-**[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]**

Xét phương trình $z^3 = 1$ trên tập số phức . Tập nghiệm của phương trình là :

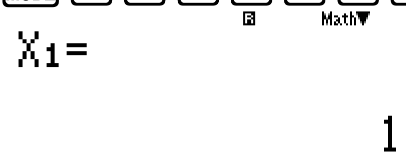
A. $S = \{1\}$ **B.** $S = \left\{1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$ **C.** $S = \left\{1; -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **D.** $S = \left\{-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

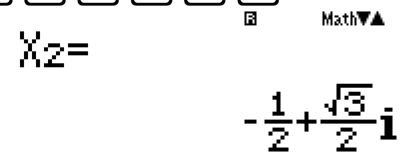
GIẢI

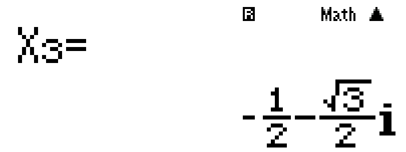
❖ **Cách Casio**

- Giải phương trình bậc ba $z^3 - 1 = 0$ với chức năng MODE 54

MODE 5 4 1 = 0 = 0 = − 1 = =







- Phương trình có 3 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, x_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 6-Biết z là nghiệm của phương trình $z + \dfrac{1}{z} = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = z^{2009} + \dfrac{1}{z^{2009}}$

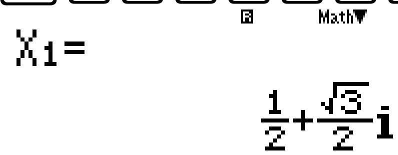
A. $P = 1$ **B.** $P = 0$ **C.** $P = -\dfrac{5}{2}$ **D.** $P = \dfrac{7}{4}$

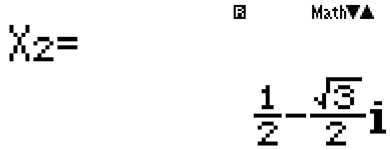
GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Quy đồng phương trình $z + \dfrac{1}{z} = 0$ ta được phương trình bậc hai $z^2 - z + 1 = 0$. Tính nghiệm phương trình này với chức năng MODE 5 3

MODE 5 3 1 = − 1 = 1 = =





- Ta thu được hai nghiệm z nhưng hai nghiệm này có vai trò như nhau nên chỉ cần lấy một nghiệm z đại diện là được

Với $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ta chuyển về dạng lượng giác $\Rightarrow z=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

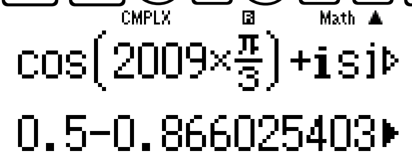
▭ 1 ▼ 2 ▶ + ▭ √▭ 3 ▼ 2 ▶ ENG SHIFT 2 3 =

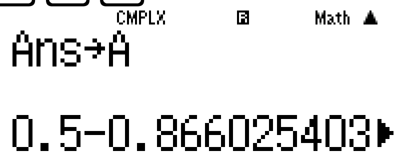


Vậy $\Rightarrow z^{2009}=1^{2009}\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)=\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)$

Tính z^{2009} và lưu và biến A

ON cos 2 0 0 9 × ▭ SHIFT x10^x ▼ 3 ▶) + ENG sin 2 0 0 9 × ▭ SHIFT x10^x ▼ 3 ▶) = SHIFT RCL (−)





Tổng kết $P=A+\frac{1}{A}=1$

ALPHA (−) + ▭ 1 ▼ ALPHA (−) =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

MỤC LỤC